Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences [...]

TOPOLOGIE. — *Un invariant des feuilletages de codimension* 1. Note (*) de MM. **Claude Godbillon** et **Jacques Vey**, transmise par M. Henri Cartan.

1. Construction de l'invariant $[\Omega]$. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1, différentiable et transversalement orientable d'une variété différentiable M^m.

Si $\omega \in \Lambda^1(M)$ est une forme de Pfaff sur M définissant $\mathcal{F}$, on déduit de la condition d'intégrabilité $\omega \wedge \mathbf{d}\omega = 0$ que la forme $\mathbf{d}\omega$ est divisible par ω : il existe une forme de Pfaff ω_1 sur M telle que $\mathbf{d}\omega = \omega \wedge \omega_1$; et deux telles formes diffèrent d'un multiple de ω.

Par différentiation de cette relation on obtient $\omega \wedge \mathbf{d}\omega_1 = 0$. Par conséquent, $\mathbf{d}\omega_1$ est aussi divisible par ω : il existe une forme de Pfaff ω_2 sur M telle que $\mathbf{d}\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$.

Différentiant cette nouvelle relation on obtient $\omega \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 - \mathbf{d}\omega_2) = 0$. Il existe donc une forme de Pfaff ω_3 sur M telle que $\mathbf{d}\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega \wedge \omega_3$.

Proposition. — *La forme* $\Omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_1 \wedge \mathbf{d}\omega_1$ *est fermée, et sa classe de cohomologie dans* $H^3(M, \mathbf{R})$ *ne dépend que de* $\mathcal{F}$.

On désignera cette classe par $[\Omega](\mathcal{F})$.

Remarques. — (i) On peut généraliser la construction précédente aux feuilletages de codimension 1, différentiables et transversalement orientables, avec singularités ([2]), de la façon suivante : si $\mathcal{F}$ est un tel feuilletage défini par une famille $f_i : U_i \to \mathbf{R}$ d'applications distinguées avec fonctions de transition g_{ji} conservant l'orientation, et si (λ_j) est une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement (U_j), on associe à $\mathcal{F}$ la forme de Pfaff $\omega = \sum \lambda_j \, df_j$. Il existe alors des formes de Pfaff ω_1 et ω_2 sur M telles que $\mathbf{d}\omega = \omega \wedge \omega_1$ et $\mathbf{d}\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$.

Dans ces conditions la forme $\Omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$ est fermée ; et, si les singularités de $\mathcal{F}$ sont génériques (ou plus généralement si l'ensemble des singularités de $\mathcal{F}$ est un fermé sans intérieur), la classe de cohomologie $[\Omega] = [\Omega](\mathcal{F})$ de Ω ne dépend que de $\mathcal{F}$.

(ii) Si $\mathcal{F}$ n'est pas transversalement orientable il existe un revêtement à deux feuillets $p : N \to M$ tel que le feuilletage $p^* \mathcal{F}$ soit transversalement orientable. Si r est l'involution de N, on peut définir $p^* \mathcal{F}$ par une forme de Pfaff ω telle que $r^* \omega = -\omega$. La forme Ω correspondante est alors invariante par r, et détermine une classe de cohomologie $[\Omega](\mathcal{F})$ dans $H^3(M, \mathbf{R})$ qui ne dépend encore que de $\mathcal{F}$.

(iii) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux feuilletages différentiables de codimension 1 de M. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont différentiablement homotopes (²) on a $[\Omega](\mathcal{F}) = [\Omega](\mathcal{F}')$.

(iv) Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage différentiable de codimension 1 de M, et si f est une application différentiable d'une variété V dans M on a

$$[\Omega](f^* \mathcal{F}) = f^*([\Omega](\mathcal{F})).$$

2. Exemples. — (i) Si $\mathcal{F}$ est défini par une forme de Pfaff fermée sans singularité on a $[\Omega](\mathcal{F}) = 0$.

(ii) Soit $M = V \times S^1$, et soit f une fonction différentiable sur V ayant 0 pour valeur régulière. Si $\mathcal{F}$ est le feuilletage de M défini par la forme $\omega = df + f\,d\theta$, on a $[\Omega](\mathcal{F}) = 0$. Par conséquent :

Proposition. — *Si un feuilletage $\mathcal{F}'$ se déduit d'un feuilletage $\mathcal{F}$ par tourbillonnement on a* $[\Omega](\mathcal{F}') = [\Omega](\mathcal{F})$.

(iii) Nous devons l'exemple fondamental suivant à R. Roussarie.

Il existe pour le groupe $G = SL(2, \mathbf{R})$ une base $\{\hat{\omega}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2\}$ des formes de Pfaff invariantes à gauche vérifiant les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\hat{\omega} &= \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}_1, \\ \mathbf{d}\hat{\omega}_1 &= \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}_2, \\ \mathbf{d}\hat{\omega}_2 &= \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2. \end{aligned}$$

Soit alors Γ un sous-groupe discret de G tel que la variété quotient $M = \Gamma \backslash G$ soit compacte. Les formes ω, ω_1 et ω_2 induites sur M par $\hat{\omega}$, $\hat{\omega}_1$ et $\hat{\omega}_2$ respectivement sont sans singularité et vérifient des identités analogues aux précédentes. La forme ω définit donc un feuilletage $\mathcal{F}$ de M pour lequel $\Omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$ est une forme volume. Et par suite $[\Omega](\mathcal{F})$ n'est pas nulle.

3. Une coalgèbre de Lie universelle pour les feuilletages de codimension 1. — Désignons par $\mathfrak{A}^*$ la coalgèbre de Lie réelle de base $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ telle que $\mathbf{d}\alpha_k = \sum c_{ij}^k \alpha_i \wedge \alpha_j$ avec

$$c_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } i + j - 1 \neq k, \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{(i+j-1)!}{i!\,j!}(j-i) & \text{pour } i + j - 1 = k. \end{cases}$$

Par itération du procédé du paragraphe 1 on obtient :

Théorème. — *Soit $\mathfrak{G}^*$ une sous-coalgèbre de Lie réelle de la coalgèbre de Lie $\Lambda^1(M)$ contenant ω. Il existe un homomorphisme h de $\mathfrak{A}^*$ dans $\mathfrak{G}^*$ tel que $h(\alpha_0) = \omega$.*

Remarques. — (i) Soit $\mathbf{X}$ un champ de vecteurs sur M transverse à $\mathcal{F}$ et tel que $\omega(X) = 1$. On peut définir un homomorphisme h de $\mathfrak{A}^*$ dans $\Lambda^1(M)$ en posant $h(\alpha_k) = (\mathbf{L}_X)^k\omega$ (dérivée de Lie $k^{\text{ième}}$ de ω).

(ii) Les seuls cas possibles de sous-coalgèbres de Lie de $\Lambda^1(M)$ contenant ω et isomorphes à la coalgèbre des formes de Pfaff invariantes sur un groupe de Lie sont les suivants :

(*a*) $\mathbf{d}\omega = 0$ (groupe des translations);

(*b*) $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{d}\omega = \omega\wedge\omega_1\\ \mathbf{d}\omega_1 = 0\end{array}\right\}$ (groupe affine);

(*c*) $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{d}\omega = \omega\wedge\omega_1\\ \mathbf{d}\omega_1 = \omega\wedge\omega_2\\ \mathbf{d}\omega_2 = \omega_1\wedge\omega_2\end{array}\right\}$ (groupe homographique).

(iii) L'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{A}$ de base $X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$, avec $[X_i, X_j] = c_{ij}^{i+j-1} X_{i+j-1}$, est isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels à une variable; et la coalgèbre $\mathfrak{A}^*$ s'interprète comme l'espace des cochaînes de degré 1 de rang fini sur $\mathfrak{A}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ (où $\mathfrak{A}$ opère trivialement).

Or la cohomologie des cochaînes de rang fini sur $\mathfrak{A}$ à valeurs réelles est la suivante [1] :

$$H^i(\mathfrak{A}, \mathbf{R}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 0, 3,$$
$$H^3(\mathfrak{A}, \mathbf{R}) = \mathbf{R} \quad \text{avec pour générateur la classe de } \alpha_0\wedge\alpha_1\wedge\alpha_2.$$

Par conséquent $[\Omega]$ s'obtient en rappelant sur M la cohomologie $H^*(\mathfrak{A}, \mathbf{R})$.

(iv) Si $\mathfrak{B}^*$ est la coalgèbre de Lie réelle quotient de $\mathfrak{A}^*$ par la relation $\omega = 0$, on peut interpréter $\mathfrak{B}^*$ comme l'espace des cochaînes de degré 1 et de rang fini sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{B}$ des champs de vecteurs formels à une variable sans terme constant. On a alors [1] :

$$H^i(\mathfrak{B}, \mathbf{R}) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 1,$$
$$H^1(\mathfrak{B}, \mathbf{R}) = \mathbf{R} \quad \text{avec pour générateur la classe de } \alpha_1.$$

On peut en donner l'interprétation géométrique suivante [3] : ω_1 induit sur chaque feuille F de $\mathcal{F}$ une forme de Pfaff fermée dont les périodes sont les logarithmes des jets d'ordre 1 des éléments d'holonomie de F.

(v) Une généralisation de cette étude en codimension quelconque devrait fournir des renseignements sur la cohomologie du classifiant $B\Gamma_p$ de Haefliger [2].

On peut donner l'exemple suivant : si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de codimension p, différentiable et transversalement orientable de M, et si

φ est un volume transverse à $\mathcal{F}$, il existe une forme de Pfaff α sur M telle que $\mathbf{d}\varphi = \varphi \wedge \alpha$. La forme $\alpha \wedge (\mathbf{d}\alpha)^p$ est alors fermée, et sa classe de cohomologie dans $H^{2p+1}(M, \mathbf{R})$ ne dépend que de $\mathcal{F}$.

(*) Séance du 5 juillet 1971.

(1) M. Gel'fand et D. B. Fuks, *Izv. Akad. Nauk S. S. S. R.*, 34, 1970, p. 322-337.

(2) A. Haefliger, *Topology*, 9, 1970, p. 183-194.

(3) G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées* (*Act. scient. et ind.*, Hermann, Paris, 1952).

C. G. : *Institut de Recherche mathématique avancée, rue René-Descartes, 67-Strasbourg, Bas-Rhin;*

J. V. : *Institut de Mathématiques pures,* B. P. n° 116, 38-*Saint-Martin-d'Hères, Isère.*