

Comptes rendus  
hebdomadaires des séances  
de l'Académie des sciences.  
Séries A et B, Sciences  
mathématiques et Sciences  
[...]

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences physiques. 1971-07-12.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisation.commerciale@bnf.fr](mailto:utilisation.commerciale@bnf.fr).

TOPOLOGIE. — *Un invariant des feuilletages de codimension 1.* Note (\*) de MM. CLAUDE GOBILLON et JACQUES VEY, transmise par M. Henri Cartan.

1. CONSTRUCTION DE L'INVARIANT  $[\Omega]$ . — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, différentiable et transversalement orientable d'une variété différentiable  $M^m$ .

Si  $\omega \in \Lambda^1(M)$  est une forme de Pfaff sur  $M$  définissant  $\mathcal{F}$ , on déduit de la condition d'intégrabilité  $\omega \wedge d\omega = 0$  que la forme  $d\omega$  est divisible par  $\omega$  : il existe une forme de Pfaff  $\omega_1$  sur  $M$  telle que  $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ ; et deux telles formes diffèrent d'un multiple de  $\omega$ .

Par différentiation de cette relation on obtient  $\omega \wedge d\omega_1 = 0$ . Par conséquent,  $d\omega_1$  est aussi divisible par  $\omega$  : il existe une forme de Pfaff  $\omega_2$  sur  $M$  telle que  $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ .

Différentiant cette nouvelle relation on obtient  $\omega \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 - d\omega_2) = 0$ . Il existe donc une forme de Pfaff  $\omega_3$  sur  $M$  telle que  $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega \wedge \omega_3$ .

PROPOSITION. — *La forme  $\Omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_1 \wedge d\omega_1$  est fermée, et sa classe de cohomologie dans  $H^3(M, \mathbf{R})$  ne dépend que de  $\mathcal{F}$ .*

On désignera cette classe par  $[\Omega](\mathcal{F})$ .

Remarques. — (i) On peut généraliser la construction précédente aux feuilletages de codimension 1, différentiables et transversalement orientables, avec singularités <sup>(2)</sup>, de la façon suivante : si  $\mathcal{F}$  est un tel feuilletage défini par une famille  $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}$  d'applications distinguées avec fonctions de transition  $g_{ji}$  conservant l'orientation, et si  $(\lambda_j)$  est une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_j)$ , on associe à  $\mathcal{F}$  la forme de Pfaff  $\omega = \sum \lambda_j df_j$ . Il existe alors des formes de Pfaff  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur  $M$  telles que  $d\omega = \omega \wedge \omega_1$  et  $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ .

Dans ces conditions la forme  $\Omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$  est fermée; et, si les singularités de  $\mathcal{F}$  sont génériques (ou plus généralement si l'ensemble des singularités de  $\mathcal{F}$  est un fermé sans intérieur), la classe de cohomologie  $[\Omega] = [\Omega](\mathcal{F})$  de  $\Omega$  ne dépend que de  $\mathcal{F}$ .

(ii) Si  $\mathcal{F}$  n'est pas transversalement orientable il existe un revêtement à deux feuillets  $p : N \rightarrow M$  tel que le feuilletage  $p^*\mathcal{F}$  soit transversalement orientable. Si  $r$  est l'involution de  $N$ , on peut définir  $p^*\mathcal{F}$  par une forme de Pfaff  $\omega$  telle que  $r^*\omega = -\omega$ . La forme  $\Omega$  correspondante est alors invariante par  $r$ , et détermine une classe de cohomologie  $[\Omega](\mathcal{F})$  dans  $H^3(M, \mathbf{R})$  qui ne dépend encore que de  $\mathcal{F}$ .

(iii) Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  deux feuilletages différentiables de codimension 1 de  $M$ . Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont différentiablement homotopes <sup>(2)</sup> on a  $[\Omega](\mathcal{F}) = [\Omega](\mathcal{F}')$ .

(iv) Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage différentiable de codimension 1 de  $M$ , et si  $f$  est une application différentiable d'une variété  $V$  dans  $M$  on a

$$[\Omega](f^* \mathcal{F}) = f^*([\Omega](\mathcal{F})).$$

2. EXEMPLES. — (i) Si  $\mathcal{F}$  est défini par une forme de Pfaff fermée sans singularité on a  $[\Omega](\mathcal{F}) = 0$ .

(ii) Soit  $M = V \times S^1$ , et soit  $f$  une fonction différentiable sur  $V$  ayant 0 pour valeur régulière. Si  $\mathcal{F}$  est le feuilletage de  $M$  défini par la forme  $\omega = df + f d\theta$ , on a  $[\Omega](\mathcal{F}) = 0$ . Par conséquent :

PROPOSITION. — Si un feuilletage  $\mathcal{F}'$  se déduit d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  par tourbillonnement on a  $[\Omega](\mathcal{F}') = [\Omega](\mathcal{F})$ .

(iii) Nous devons l'exemple fondamental suivant à R. Roussarie.

Il existe pour le groupe  $G = \text{SL}(2, \mathbf{R})$  une base  $\{\hat{\omega}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2\}$  des formes de Pfaff invariantes à gauche vérifiant les identités suivantes :

$$d\hat{\omega} = \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}_1,$$

$$d\hat{\omega}_1 = \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}_2,$$

$$d\hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2.$$

Soit alors  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  tel que la variété quotient  $M = \Gamma \backslash G$  soit compacte. Les formes  $\omega, \omega_1$  et  $\omega_2$  induites sur  $M$  par  $\hat{\omega}, \hat{\omega}_1$  et  $\hat{\omega}_2$  respectivement sont sans singularité et vérifient des identités analogues aux précédentes. La forme  $\omega$  définit donc un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M$  pour lequel  $\Omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$  est une forme volume. Et par suite  $[\Omega](\mathcal{F})$  n'est pas nulle.

3. UNE COALGÈBRE DE LIE UNIVERSELLE POUR LES FEUILLETAGES DE CODIMENSION 1. — Désignons par  $\mathfrak{A}^*$  la coalgèbre de Lie réelle de base  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$  telle que  $d\alpha_k = \sum c_{ij}^k \alpha_i \wedge \alpha_j$  avec

$$c_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } i + j - 1 \neq k, \\ \frac{1}{2} \frac{(i + j - 1)!}{i! j!} (j - i) & \text{pour } i + j - 1 = k. \end{cases}$$

Par itération du procédé du paragraphe 1 on obtient :

THÉORÈME. — Soit  $\mathfrak{G}^*$  une sous-coalgèbre de Lie réelle de la coalgèbre de Lie  $\Lambda^1(M)$  contenant  $\omega$ . Il existe un homomorphisme  $h$  de  $\mathfrak{A}^*$  dans  $\mathfrak{G}^*$  tel que  $h(\alpha_0) = \omega$ .

*Remarques.* — (i) Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  transverse à  $\mathcal{F}$  et tel que  $\omega(X) = 1$ . On peut définir un homomorphisme  $h$  de  $\mathcal{A}^*$  dans  $\Lambda^1(M)$  en posant  $h(\alpha_k) = (L_X)^k \omega$  (dérivée de Lie  $k^{\text{ème}}$  de  $\omega$ ).

(ii) Les seuls cas possibles de sous-coalgèbres de Lie de  $\Lambda^1(M)$  contenant  $\omega$  et isomorphes à la coalgèbre des formes de Pfaff invariantes sur un groupe de Lie sont les suivants :

$$(a) \quad d\omega = 0 \quad (\text{groupe des translations});$$

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\omega = \omega \wedge \omega_1 \\ d\omega_1 = 0 \end{array} \right\} (\text{groupe affine});$$

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\omega = \omega \wedge \omega_1 \\ d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 \end{array} \right\} (\text{groupe homographique}).$$

(iii) L'algèbre de Lie réelle  $\mathcal{A}$  de base  $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$ , avec  $[X_i, X_j] = c_{ij}^{i+j-1} X_{i+j-1}$ , est isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels à une variable; et la coalgèbre  $\mathcal{A}^*$  s'interprète comme l'espace des cochaînes de degré 1 de rang fini sur  $\mathcal{A}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  (où  $\mathcal{A}$  opère trivialement).

Or la cohomologie des cochaînes de rang fini sur  $\mathcal{A}$  à valeurs réelles est la suivante <sup>(1)</sup> :

$$H^i(\mathcal{A}, \mathbf{R}) = 0 \quad \text{pour } i \neq 0, 3,$$

$$H^3(\mathcal{A}, \mathbf{R}) = \mathbf{R} \quad \text{avec pour générateur la classe de } \alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2.$$

Par conséquent  $[\Omega]$  s'obtient en rappelant sur  $M$  la cohomologie  $H^*(\mathcal{A}, \mathbf{R})$ .

(iv) Si  $\mathcal{B}^*$  est la coalgèbre de Lie réelle quotient de  $\mathcal{A}^*$  par la relation  $\omega = 0$ , on peut interpréter  $\mathcal{B}^*$  comme l'espace des cochaînes de degré 1 et de rang fini sur l'algèbre de Lie  $\mathcal{B}$  des champs de vecteurs formels à une variable sans terme constant. On a alors <sup>(1)</sup> :

$$H^i(\mathcal{B}, \mathbf{R}) = 0 \quad \text{pour } i > 1,$$

$$H^1(\mathcal{B}, \mathbf{R}) = \mathbf{R} \quad \text{avec pour générateur la classe de } \alpha_1.$$

On peut en donner l'interprétation géométrique suivante <sup>(3)</sup> :  $\omega_1$  induit sur chaque feuille  $F$  de  $\mathcal{F}$  une forme de Pfaff fermée dont les périodes sont les logarithmes des jets d'ordre 1 des éléments d'holonomie de  $F$ .

(v) Une généralisation de cette étude en codimension quelconque devrait fournir des renseignements sur la cohomologie du classifiant  $B\Gamma_p$  de Haefliger <sup>(2)</sup>.

On peut donner l'exemple suivant : si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de codimension  $p$ , différentiable et transversalement orientable de  $M$ , et si

$\nu$  est un volume transverse à  $\mathcal{F}$ , il existe une forme de Pfaff  $\alpha$  sur  $M$  telle que  $d\nu = \nu \wedge \alpha$ . La forme  $\alpha \wedge (d\alpha)^p$  est alors fermée, et sa classe de cohomologie dans  $H^{2p+1}(M, \mathbf{R})$  ne dépend que de  $\mathcal{F}$ .

(\*) Séance du 5 juillet 1971.

(<sup>1</sup>) M. GEL'FAND et D. B. FUKS, *Izv. Akad. Nauk S. S. S. R.*, 34, 1970, p. 322-337.

(<sup>2</sup>) A. HAEFLIGER, *Topology*, 9, 1970, p. 183-194.

(<sup>3</sup>) G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées* (*Act. scient. et ind.*, Hermann, Paris, 1952).

C. G. : *Institut de Recherche  
mathématique avancée,  
rue René-Descartes, 67-Strasbourg,  
Bas-Rhin;*

J. V. :  
*Institut de Mathématiques pures,  
B. P. n° 116,  
38-Saint-Martin-d'Hères,  
Isère.*