

Comptes rendus  
hebdomadaires des séances  
de l'Académie des sciences /  
publiés... par MM. les  
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1950-01-01.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisation.commerciale@bnf.fr](mailto:utilisation.commerciale@bnf.fr).

Soit  $\Lambda'_i = \bigcup_{i,k} D_i^k$  ( $0 \leq k \leq n-2$ ). Si ce complexe  $\Lambda'_i$  qui contient toutes les singularités de  $H_i \cup V_i$  a un nombre total  $\nu'(t)$  de cellules tels que

$$\nu'(t) = o\left[\frac{1}{\eta_2(t)}\right] \quad \text{et} \quad \nu'(t) = o[\mathfrak{v}(t)],$$

il vient, en introduisant les nombres de recouvrement  $N(T_i^k, t)$ ,

$$\lim_t \left[ \frac{1}{\mathfrak{v}(t)} \sum_{i,k \leq n-2} (-1)^k [m''(D_i^k) - 1] + \sum_{i,k \leq n-2} (-1)^k \left(1 - \frac{N(T_i^k, t)}{\mathfrak{v}(t)}\right) \right] = \rho(E).$$

Ceci, en particulier, si l'image par  $f$  du complexe singulier  $\Delta$  est un complexe fini de  $E$ , cas simple qui se traite sans métrique avec des triangulations fixes.

TOPOLOGIE. — *Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes.* Note (\*) de M. **ARMAND BOREL**, présentée par M. Élie Cartan.

Le plan projectif des octaves de Cayley est un espace homogène du groupe simple compact exceptionnel  $F_4$ . Le n° 2 complète la détermination des groupes de Lie compacts transitifs sur les sphères, due à D. Montgomery et H. Samelson (1), (2). Au n° 3, applications à l'homotopie de  $G_2, F_4$ .

*Notations.* —  $A_l, B_l, C_l, D_l$  désigneront les groupes linéaires classiques compacts représentant ces structures de groupes de Lie simples compacts.  $\overline{B}_l$ , resp.  $\overline{D}_l$  sera le groupe de recouvrement simplement connexe de  $B_l$ , resp.  $D_l$ . Rappelons que les structures de groupe compact  $G_2, F_4$  n'ont, à une isomorphie près, qu'un représentant.

1. Le plan projectif des octaves est une variété close à 16 dimensions; elle contient des sous-variétés homéomorphes à  $S_8$  qui, prises comme droites projectives, vérifient les axiomes d'incidence de la géométrie projective (3).

**THÉORÈME 1.** — *Le plan projectif des octaves de Cayley est homéomorphe à l'espace homogène  $F_4/\overline{B}_4$ ;  $F_4$  opère transitivement sur les droites projectives.*

D'après E. Cartan(4), il passe par deux points de  $F_4/\overline{B}_4$  en général une seule géodésique (dans une métrique riemannienne invariante par  $F_4$ ). Les points que l'on peut joindre à un point donné  $p$  par plus d'une géodésique forment une variété à huit dimensions, la variété antipodique de  $p$ , qui est homéomorphe

(\*) Séance du 3 avril 1950.

(1) *Ann. Math.*, (2), 44, 1943, p. 454-470.

(2) A. BOREL, *Bull. Am. Math. Soc.*, 55, 1949, p. 580-587, complète (1) pour les sphères de dimensions paires.

(3) G. HIRSCH, *Colloque de Topologie algébrique*, Paris, 1947, p. 35-42.

(4) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 44, 1927, p. 345-467.

à  $S_8$ . On prend les variétés antipodiques comme droites projectives; pour vérifier les axiomes d'incidence on se sert de l'unicité de l'antipode d'une variété antipodique et d'une deuxième définition de cette dernière, formulée à l'aide des sous-groupes de  $F_4$  isomorphes à  $\bar{B}_4$ .

Les quatre variétés closes connues qui sont des plans projectifs admettent ainsi un groupe de Lie compact transitif de transformations, qui sont même projectives; il n'en serait plus de même pour d'autres plans projectifs; en effet, une telle variété a  $(1 + t^n + t^{2n})$  comme polynôme de Poincaré <sup>(2)</sup> et son deuxième groupe d'homotopie est nul, (si  $n > 3$ ) puisque le complémentaire d'une droite projective  $S_n$  est l'espace euclidien <sup>(3)</sup>. Or, mis à part les trois plans projectifs de dimensions  $> 2$ , un seul espace homogène de groupe de Lie compact a la caractéristique d'Euler-Poincaré 3, c'est  $G_2/A_1 \times A_1$  <sup>(2)</sup>; ici  $A_1 \times A_1$  ne désigne que la structure du groupe d'isotropie, en réalité isomorphe à  $D_2$ . On voit aisément que le polynôme de Poincaré de cet espace est  $1 + t^4 + t^8$ , mais  $\pi_2(G_2/D_2) = \pi_1(D_2) \neq 0$  (suite d'homotopie), donc :

*La variété  $G_2/D_2$  a même polynôme de Poincaré que le plan projectif quaternionien, mais ne lui est pas homéomorphe.*

2. *Groupes transitifs sur  $S_{2n-1}$ .* Soit  $W = G/G'$ ;  $G$  est effectif sur  $W$  si seule l'unité de  $G$  induit l'identité de  $W$ . Si  $W = S_{2n-1}$ ,  $G'$  est non homologue à zéro dans  $G$  et  $\text{rang } G = \text{rang } G' + 1$  <sup>(5)</sup>. On montre d'abord dans <sup>(1)</sup> que si  $G$  est effectif et transitif sur  $S_{2n-1}$ , il est localement le produit direct d'un ou deux facteurs. On a plus généralement le

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $G$  de Lie compact connexe effectif sur  $W = G/G'$ ,  $G'$  connexe. Si  $\text{rang } G' = \text{rang } G - k$  et si  $G$  est localement isomorphe au produit direct de plus de  $k + 1$  groupes (non réduits à l'élément neutre),  $W$  est un produit topologique d'espaces homogènes.*

Il y a donc ici un ou deux facteurs simples; dans le deuxième cas, l'un est de rang 1 et l'autre est transitif sur  $S_{2n-1}$  <sup>(1)</sup>, on est bien ramené au cas où  $G$  est simple. Les seuls groupes classiques transitifs sur  $S_{2n-1}$  sont  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $C_m$  et éventuellement  $B_m$  (ou  $\bar{B}_m$ ) (si  $n = 2m$ ) <sup>(1)</sup>. Le plus difficile est de savoir si  $S_{4m-1}$  est homéomorphe à  $\bar{B}_m/\bar{B}_{m-1}$  ou à  $B_m/B_{m-1}$ ; il résulte de <sup>(1)</sup> que c'est exclu pour  $m \neq 2, 4$ . On peut aussi le voir en vérifiant par le calcul des plus petits degrés des représentations de  $B_{m-1}$  que ses images non triviales dans  $B_m$  sont toutes équivalentes à la somme  $1 + 1 + B_{m-1}$ ; or le quotient de  $B_m$  par un tel sous-groupe est la variété des vecteurs unitaires tangents à  $S_{2m}$ , qui n'est pas  $S_{4m-1}$ . Par contre  $\bar{B}_3$  a une représentation fidèle  $1 + \Delta$ , où  $\Delta$  est irréductible de degré 8 et le quotient de  $\bar{B}_4$  par l'image inverse de ce sous-groupe de  $B_4$  est  $S_{15}$ . Cela équivaut en somme au fait que  $F_4/\bar{B}_4$  est de rang 1 <sup>(1)</sup>. De manière analogue

<sup>(2)</sup> H. SAMELSON, *Ann. Math.*, (2), 42, 1941, p. 1091-1137.

on a  $\bar{B}_2/\bar{B}_1 = S_7$ , mais cela est bien connu, car  $\bar{B}_2 \cong C_2$ ,  $\bar{B}_1 \cong C_1$ . On montre facilement que  $\Delta$  opère transitivement sur l'espace quotient de  $D_4$  par  $1 + B_3$ , qui est  $S_7$ ; cette dernière est donc le quotient de  $\bar{B}_3$  par un sous-groupe à 14 paramètres, qui est forcément  $G_2$  <sup>(6)</sup>.

Les espaces  $G_2/A_1$  ou  $G_2/B_1$  ont mêmes nombres de Betti que  $S_{11}$  mais ne lui sont pas homéomorphes [la suite d'homotopie appliquée à  $G_2/A_2 = S_6$  donne  $\pi_4(G_2) = \pi_4(A_2) = 0$  <sup>(7)</sup>, tandis que  $G_2/A_1 = S_{11}$  donnerait  $\pi_4(G_2) \neq 0$ ]. Les autres groupes exceptionnels ne sont pas transitifs sur  $S_{2n-1}$  car ils ne possèdent pas de sous-groupes de rang  $l-1$  non homologues à zéro <sup>(8)</sup>. On peut alors compléter les théorèmes 3 et 4 de <sup>(1)</sup> par le :

**THÉORÈME 3.** — *Les espaces homogènes de groupes de Lie simples compacts homéomorphes à  $S_{2n-1}$  sont  $A_n/A_{n-1}$ ,  $D_n/B_{n-1}$  et (pour  $n = 2m$ )  $C_m/C_{m-1}$ ; enfin il y a encore  $\bar{B}_4/\bar{B}_3 = S_{15}$  et  $\bar{B}_3/G_2 = S_7$ .*

3. Les sept premiers groupes d'homotopie du plan des octaves  $V$  sont nuls, puisque le complémentaire d'une  $S_8$  est l'espace euclidien <sup>(9)</sup>. La suite d'homotopie appliquée à cette fibration et aux deux dernières du théorème 3 donne le :

**THÉORÈME 4.** —  $\pi_i(G_2) = \pi_i(B_3)$ , ( $2 \leq i \leq 5$ );  $\pi_i(F_4) = \pi_i(B_4)$ , ( $2 \leq i \leq 6$ );  $\pi_i(B_3) = \pi_i(B_4)$ , ( $i \leq 13$ ).

**MÉCANIQUE.** — *Contribution à l'étude de la stabilité des circuits de régulation et des servomécanismes.* Note (\*) de M. **PIERRE-LOUIS DUBOIS-VIOLETTE**, présentée par M. Louis de Broglie.

J'examine la stabilité d'un régulateur automatique ou d'un servomécanisme, par la théorie de la fusion des racines. Je montre comment le domaine de stabilité d'un système à régulation proportionnelle peut être étendu, en introduisant une réaction dérivée, et que dans certains cas il est avantageux de recourir à une réaction dérivée positive.

I. Le circuit de régulation de la figure 1 comprend l'installation à régler  $[G(p)]$  et le régulateur  $[-R(p)]$ ,  $G(p)$  et  $-R(p)$  spécifiant les rapports de transmission respectifs de chacun de ces éléments, le signe  $-$  étant une notation commode, puisque la réaction est en général négative. Précisons que  $G(p)$  est le rapport de transmission entre la grandeur de réglage et la grandeur réglée.

<sup>(6)</sup> Cela a d'abord été démontré par M. A. Blanchard, par la considération des structures presque complexes de  $S_6$ .

<sup>(7)</sup> L. PONTRJAGIN, *Comm. Math. Helv.*, 13, 1940-41, p. 277-292.

<sup>(8)</sup> YEN CHIH TA, *Comptes rendus*, 228, 1949, p. 628-630.

<sup>(9)</sup> On a de plus d'après M. A. Blanchard :  $\pi_i(V) = \pi_{i-1}(S_7)$  ( $i \leq 15$ ).

(\*) Séance du 20 mars 1950.