Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

Soit $\Lambda'_t = \bigcup_{i,k} D^k_i (0 \leqq k \leqq n-2)$. Si ce complexe Λ'_t qui contient toutes les singularités de $H_t \cup V_t$ a un nombre total $\nu'(t)$ de cellules tels que

$$\nu'(t) = o\left[\frac{1}{\eta_2(t)}\right] \qquad \text{et} \qquad \nu'(t) = o[\mathfrak{v}(t)],$$

il vient, en introduisant les nombres de recouvrement $N(T'^k_i, t)$,

$$\lim_t \left[\frac{1}{\mathfrak{v}(t)} \sum_{i,\,k \leq n-2} (-1)^k [m''(D'^k_i) - 1] + \sum_{i,\,k \leq n-2} (-1)^k \left(1 - \frac{N(T'^k_i, t)}{\mathfrak{v}(t)}\right)\right] = \rho(E).$$

Ceci, en particulier, si l'image par f du complexe singulier Δ est un complexe fini de E, cas simple qui se traite sans métrique avec des triangulations fixes.

TOPOLOGIE. — *Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes.* Note (*) de M. **Armand Borel**, présentée par M. Élie Cartan.

Le plan projectif des octaves de Cayley est un espace homogène du groupe simple compact exceptionnel F_4. Le n° 2 complète la détermination des groupes de Lie compacts transitifs sur les sphères, due à D. Montgomery et H. Samelson ([1]), ([2]). Au n° 3, applications à l'homotopie de G_2, F_4.

Notations. — A_l, B_l, C_l, D_l désigneront les groupes linéaires classiques compacts représentant ces structures de groupes de Lie simples compacts. $\overline{B_l}$, resp. $\overline{D_l}$ sera le groupe de recouvrement simplement connexe de B_l, resp. D_l. Rappelons que les structures de groupe compact G_2, F_4 n'ont, à une isomorphie près, qu'un représentant.

1. Le plan projectif des octaves est une variété close à 16 dimensions; elle contient des sous-variétés homéomorphes à S_8 qui, prises comme droites projectives, vérifient les axiomes d'incidence de la géométrie projective ([3]).

Théorème 1. — *Le plan projectif des octaves de Cayley est homéomorphe à l'espace homogène* $F_4/\overline{B_4}$; F_4 *opère transitivement sur les droites projectives.*

D'après E. Cartan([4]), il passe par deux points de $F_4/\overline{B_4}$ en général une seule géodésique (dans une métrique riemanienne invariante par F_4). Les points que l'on peut joindre à un point donné p par plus d'une géodésique forment une variété à huit dimensions, la variété antipodique de p, qui est homéomorphe

(*) Séance du 3 avril 1950.

([1]) *Ann. Math.*, (2), 44, 1943, p. 454-470.

([2]) A. Borel, *Bull. Am. Math. Soc.*, 55, 1949, p. 580-587, complète ([1]) pour les sphères de dimensions paires.

([3]) G. Hirsch, *Colloque de Topologie algébrique*, Paris, 1947, p. 35-42.

([4]) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 44, 1927, p. 345-467.

à S_8. On prend les variétés antipodiques comme droites projectives; pour vérifier les axiomes d'incidence on se sert de l'unicité de l'antipode d'une variété antipodique et d'une deuxième définition de cette dernière, formulée à l'aide des sous-groupes de F_4 isomorphes à $\overline{B}_4$.

Les quatre variétés closes connues qui sont des plans projectifs admettent ainsi un groupe de Lie compact transitif de transformations, qui sont même projectives; il n'en serait plus de même pour d'autres plans projectifs; en effet, une telle variété a $(1+t^n+t^{2n})$ comme polynôme de Poincaré (³) et son deuxième groupe d'homotopie est nul, (si $n>3$) puisque le complémentaire d'une droite projective S_n est l'espace euclidien (³). Or, mis à part les trois plans projectifs de dimensions >2, un seul espace homogène de groupe de Lie compact a la caractéristique d'Euler-Poincaré 3, c'est $G_2/A_1\times A_1$ (²); ici $A_1\times A_1$ ne désigne que la structure du groupe d'isotropie, en réalité isomorphe à D_2. On voit aisément que le polynôme de Poincaré de cet espace est $1+t^4+t^8$, mais $\pi_2(G_2/D_2)=\pi_1(D_2)\neq 0$ (suite d'homotopie), donc :

La variété G_2/D_2 a même polynôme de Poincaré que le plan projectif quaternionien, mais ne lui est pas homéomorphe.

2. *Groupes transitifs sur S_{2n-1}.* Soit $W=G/G'$; G est *effectif* sur W si seule l'unité de G induit l'identité de W. Si $W=S_{2n-1}$, G' est non homologue à zéro dans G et rang $G=\text{rang}\,G'+1$ (⁵). On montre d'abord dans (¹) que si G est effectif et transitif sur S_{2n-1}, il est localement le produit direct d'un ou deux facteurs. On a plus généralement le

THÉORÈME 2. — *Soit G de Lie compact connexe effectif sur $W=G/G'$, G' connexe. Si rang $G'=\text{rang}\,G-k$ et si G est localement isomorphe au produit direct de plus de $k+1$ groupes (non réduits à l'élément neutre), W est un produit topologique d'espaces homogènes.*

Il y a donc ici un ou deux facteurs simples; dans le deuxième cas, l'un est de rang 1 et l'autre est transitif sur S_{2n-1} (¹), on est bien ramené au cas où G est simple. Les seuls groupes classiques transitifs sur S_{2n-1} sont A_n, D_n, C_m et éventuellement B_m (ou $\overline{B}_m$) (si $n=2m$) (¹). Le plus difficile est de savoir si S_{4m-1} est homéomorphe à $\overline{B}_m/\overline{B}_{m-1}$ ou à B_m/B_{m-1}; il résulte de (¹) que c'est exclu pour $m\neq 2, 4$. On peut aussi le voir en vérifiant par le calcul des plus petits degrés des représentations de B_{m-1} que ses images non triviales dans B_m sont toutes équivalentes à la somme $1+1+B_{m-1}$; or le quotient de B_m par un tel sous-groupe est la variété des vecteurs unitaires tangents à S_{2m}, qui n'est pas S_{4m-1}. Par contre $\overline{B}_3$ a une représentation fidèle $1+\Delta$, où Δ est irréductible de degré 8 et le quotient de $\overline{B}_4$ par l'image inverse de ce sous-groupe de B_4 est S_{15}. Cela équivaut en somme au fait que $F_4/\overline{B}_4$ est de rang 1 (⁴). De manière analogue

(⁵) H. SAMELSON, *Ann. Math.*, (2), 42, 1941, p. 1091-1137.

on a $\overline{B}_2/\overline{B}_1 = S_7$, mais cela est bien connu, car $\overline{B}_2 \cong C_2$, $\overline{B}_1 \cong C_1$. On montre facilement que Δ opère transitivement sur l'espace quotient de D_4 par $1 + B_3$, qui est S_7; cette dernière est donc le quotient de $\overline{B}_3$ par un sous-groupe à 14 paramètres, qui est forcément G_2 (6).

Les espaces G_2/A_1 ou G_2/B_1 ont mêmes nombres de Betti que S_{11} mais ne lui sont pas homéomorphes [la suite d'homotopie appliquée à $G_2/A_2 = S_6$ donne $\pi_4(G_2) = \pi_4(A_2) = 0$ (7), tandis que $G_2/A_1 = S_{11}$ donnerait $\pi_4(G_2) \neq 0$]. Les autres groupes exceptionnels ne sont pas transitifs sur S_{2n-1} car ils ne possèdent pas de sous-groupes de rang $l - 1$ non homologues à zéro (8). On peut alors compléter les théorèmes 3 et 4 de (1) par le :

Théorème 3. — *Les espaces homogènes de groupes de Lie simples compacts homéomorphes à* S_{2n-1} *sont* A_n/A_{n-1}, D_n/B_{n-1} *et (pour* $n = 2m$*)* C_m/C_{m-1}; *enfin il y a encore* $\overline{B}_4/\overline{B}_3 = S_{15}$ *et* $\overline{B}_3/G_2 = S_7$.

3. Les sept premiers groupes d'homotopie du plan des octaves V sont nuls, puisque le complémentaire d'une S_8 est l'espace euclidien (9). La suite d'homotopie appliquée à cette fibration et aux deux dernières du théorème 3 donne le :

Théorème 4. — $\pi_i(G_2) = \pi_i(B_3)$, $(2 \leqq i \leqq 5)$; $\pi_i(F_4) = \pi_i(B_4)$, $(2 \leqq i \leqq 6)$; $\pi_i(B_3) = \pi_i(B_4)$, $(i \leqq 13)$.

MÉCANIQUE. — *Contribution à l'étude de la stabilité des circuits de régulation et des servomécanismes.* Note (*) de M. **Pierre-Louis Dubois-Violette**, présentée par M. Louis de Broglie.

J'examine la stabilité d'un régulateur automatique ou d'un servomécanisme, par la théorie de la fusion des racines. Je montre comment le domaine de stabilité d'un système à régulation proportionnelle peut être étendu, en introduisant une réaction dérivée, et que dans certains cas il est avantageux de recourir à une réaction dérivée *positive*.

I. Le circuit de régulation de la figure 1 comprend l'installation à régler $[G(p)]$ et le régulateur $[-R(p)]$, $G(p)$ et $-R(p)$ spécifiant les rapports de transmission respectifs de chacun de ces éléments, le signe — étant une notation commode, puisque la réaction est en général négative. Précisons que $G(p)$ est le rapport de transmission entre la grandeur de réglage et la grandeur réglée.

---

(6) Cela a d'abord été démontré par M. A. Blanchard, par la considération des structures presque complexes de S_6.

(7) L. Pontrjagin, *Comm. Math. Helv.*, 13, 1940-41, p. 277-292.

(8) Yen Chih Ta, *Comptes rendus*, 228, 1949, p. 628-630.

(9) On a de plus d'après M. A. Blanchard : $\pi_i(V) = \pi_{i-1}(S_7)$ $(i \leqq 15)$.

(*) Séance du 20 mars 1950.