Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

TOPOLOGIE. — *Une remarque sur les classes de Thom.*
Note (*) de M. **Weishu Shih**, transmise par M. Henri Cartan.

1. Désignons par $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(X)$ [resp. $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0(X)$, $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(X)$] le semi-groupe commutatif (monoïde abélien) des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels complexes sur un CW-complexe fini X (resp. fibrés réels orientés de dimension paire, et fibrés réels orientés) par rapport à la somme de Whitney $\oplus$. Rappelons que K(X) [resp. KSO (X)] est le groupe de Grothendieck de $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(X)$ [resp. $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(X)$]; on pose

$$K^*(X) = K^0(X) \oplus K^1(X),$$

où $K^0(X) = K(X)$, $K^1(X) = \tilde{K}(\Sigma X)$ (ΣX la suspension de X et $\sim$ le groupe résuit) [1], et

$$H^{2*}(X) = \prod_i H^{2i}(X), \qquad H^*(X) = \prod_i H^i(X).$$

On note A un anneau commutatif avec unité contenant 1/2, et l'on pose

$$K_A(X) = K(X) \otimes_{\mathbf{Z}} A, \qquad K_A^*(X) = K^*(X) \otimes_{\mathbf{Z}} A.$$

K (resp. H^{2*}, ...) sont des foncteurs contravariants de la catégorie des CW-complexes dans celle des semi-groupes, la structure de semi-groupe étant définie par le produit tensoriel (resp. le cup-produit). Dans la suite, L désigne l'un des foncteurs K_A, K_A^*, H^{2*}, H^*, et $\mathcal{E}$ l'un des foncteurs $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}$, $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0$, $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}$; on notera

$$\mathcal{H}om(\mathcal{E}, L)$$

le semi-groupe des morphismes de foncteurs; un tel morphisme sera aussi appelé une « classe caractéristique ». Notons $\mathcal{H}om^I(\mathcal{E}, L)$ le sous-groupe formé par les éléments *inversibles* de $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, L)$. On a évidemment

$$\mathcal{H}om^I(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, L) \approx \mathcal{H}om(K, L), \qquad \mathcal{H}om^I(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}, L) \approx \mathcal{H}om(KSO, L).$$

Exemples. — La classe d'Euler $\chi \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, H^{2*})$. L'algèbre extérieure $\lambda_1(\xi)$ et l'algèbre extérieure alternée $\lambda_{-1}(\xi)$ de Grothendieck [2] d'un fibré complexe ξ définissent des éléments λ_1, $\lambda_{-1} \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, K)$. Nous désignons par $\lambda_0^- \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, K)$ l'élément caractérisé [9] par la condition : « Pour tout fibré η orienté réel de dimension 2, on a

$$\lambda_0^-(\eta) = \xi - \bar{\xi},$$

où ξ est l'unique fibré complexe isomorphe à η comme fibré réel et $\bar{\xi}$ son conjugué ». $\lambda^- \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, K_A)$ est défini par $\lambda^- = (1/2)\lambda_0^-$.

Nous désignons par $\dot{\eta}$ l'espace de Thom [10] d'un fibré vectoriel réel η (resp. complexe) et par $j : X \to \dot{\eta}$ l'application induite par la section nulle de η. La structure multiplicative de L induit des produits externes

$$\mathrm{L}(\mathrm{X}) \otimes \tilde{\mathrm{L}}(\dot{\eta}_1) \to \tilde{\mathrm{L}}(\dot{\eta}_1),$$
$$\tilde{\mathrm{L}}(\dot{\eta}_1) \otimes \tilde{\mathrm{L}}(\dot{\eta}_2) \to \tilde{\mathrm{L}}((\eta_1 \oplus \eta_2)^{\cdot}) \qquad [\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathrm{X})]$$

[où $\tilde{\mathrm{L}}(\dot{\eta}) = \mathrm{L}(\dot{\eta}, e)$, $e =$ le point d'identification de l'espace de Thom] qu'on notera multiplicativement.

2. Définition. — *Une classe fondamentale* $\mathfrak{U}$ *pour* $(\mathcal{E}, \mathrm{L})$ *est la donnée, pour chaque fibré vectoriel* $\eta \in \mathcal{E}(\mathrm{X})$, *d'un élément* $\mathfrak{U}(\eta) \in \tilde{\mathrm{L}}(\dot{\eta})$ *vérifiant les conditions :*

(i) $\mathfrak{U}(\eta)$ *est fonctoriel par rapport à l'image réciproque des fibrés ;*

(ii) $\mathfrak{U}$ *est multiplicative, c'est-à-dire*

$$\mathfrak{U}(\eta_1) \,.\, \mathfrak{U}(\eta_2) = \mathfrak{U}(\eta_1 \oplus \eta_2) \qquad \text{pour} \quad \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{E}(\mathrm{X}).$$

Une classe fondamentale $\mathfrak{U}$ *est dite une classe de Thom, si le morphisme*

$$\varphi : \ \mathrm{L}(\mathrm{X}) \to \tilde{\mathrm{L}}(\dot{\eta})$$

défini par $\varphi(x) = x\,\mathfrak{U}(\eta)$ *est un isomorphisme de* A-*modules.*

Désignons dans la suite par

$$\mathcal{T}hom(\mathcal{E}, \mathrm{L}) \quad \mathcal{F}on(\mathcal{E}, \mathrm{L})$$

l'ensemble des classes de Thom et celui des classes fondamentales pour $(\mathcal{E}, \mathrm{L})$.

Exemple. — L'opérateur elliptique D_0 [8] d'une variété riemannienne orientée de dimension paire conduit à définir, pour tout fibré vectoriel orienté de dimension paire, une classe fondamentale de l'espace de Thom [6]. On notera $\mathfrak{U}_0^- \in \mathcal{F}on(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathrm{K})$ le morphisme de foncteur ainsi défini; on vérifie (*cf.* exemple § 1) que $\tilde{j}(\mathfrak{U}_0^-) = \lambda_0^-$.

Soit

$$\tilde{j} : \ \mathcal{F}on(\mathcal{E}, \mathrm{L}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathrm{L})$$

l'homomorphisme induit par la section nulle j : pour toute $\mathfrak{U} \in \mathcal{F}on(\mathcal{E}, \mathrm{L})$, $\tilde{j}(\mathfrak{U})$ est défini par : $\tilde{j}(\mathfrak{U})(\eta) = j^*(\mathfrak{U}(\eta))$, où $\eta \in \mathcal{E}(\mathrm{X})$ et

$$j^* : \ \mathrm{L}(\dot{\eta}) \to \mathrm{L}(\mathrm{X}).$$

Théorème 1. — *L'homomorphisme* $\tilde{j}$ *est injectif dans chacun des trois cas suivants :*

$$\tilde{j}_1 : \ \mathcal{F}on(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathrm{K}) \ \to \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathrm{K});$$
$$\tilde{j}_2 : \ \mathcal{F}on(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathrm{H}^{2*}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathrm{H}^{2*});$$
$$\tilde{j}_3 : \ \mathcal{F}on(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathrm{K}_\Lambda) \to \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathrm{K}_\Lambda).$$

L'image de $\tilde{j}_1$ *se compose des* α *tels que* $\alpha(1_{\mathbf{C}}) = 0$, *où* $1_{\mathbf{C}}$ *est le fibré trivial complexe de dimension un. L'image de* $\tilde{j}_2$, *resp.* $\tilde{j}_3$ *se compose des* β *tels que* $\beta(2_{\mathbf{R}}) = 0$, *où* $2_{\mathbf{R}}$ *est le fibré réel trivial de dimension* 2.

On peut remarquer que l'algèbre extérieure alternée λ_{-1} vérifie $\lambda_{-1}^{\cdot}(1_{\mathbf{C}}) = 0$, donc il existe une unique classe fondamentale, dite de Grothendieck [5]

$\mathcal{U}_g \in \mathcal{F}on\,(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathrm{K})$, telle que $\tilde{j}\,(\mathcal{U}_g) = \lambda_{-1}$. De même, il existe une classe fondamentale de Bott ([3]) $\mathcal{U}_b$ telle que $\tilde{j}(\mathcal{U}_b) = \bar{\lambda}^{-1}$. L'unique classe fondamentale $\mathcal{U}_t \in \mathcal{F}on(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{H}^{2*})$ telle que $\tilde{j}(\mathcal{U}_t) =$ la classe d'Euler, n'est autre que la classe de Thom [([9]), ([10])]. On désigne par $\mathcal{U}^- \in \mathcal{F}on(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{K}_\Lambda)$, l'unique classe fondamentale telle que $\tilde{j}(\mathcal{U}^-) = \lambda^-$.

Remarque. — Le morphisme canonique $\theta : \mathcal{F}on\,(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{K}) \to \mathcal{F}on(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathrm{K})$ induit par le fibré réel orienté sous-jacent d'un fibré complexe, vérifie $\theta(\mathcal{U}^-_0) = \lambda_1 . \mathcal{U}_b$.

Définissons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_g, \rho_b &: \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathrm{K}) \to \mathcal{F}on(\mathcal{E}^0_{\mathbf{C}}, \mathrm{K});\\ \rho_t &: \mathcal{H}om(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{H}^{2*}) \to \mathcal{F}on(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{H}^{2*})\\ \rho^- &: \mathcal{H}om(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{K}_\Lambda) \to \mathcal{F}on(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{K}_\Lambda) \end{aligned}$$

par les formules

$$\begin{aligned} &\rho_g(\alpha) = \alpha.\mathcal{U}_g, \quad \rho_b(\alpha) = \alpha.\mathcal{U}_b, && \text{où } \alpha \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathrm{K});\\ &\rho_t(\beta) = \beta.\mathcal{U}_t, && \text{où } \beta \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{H}^{2*});\\ &\rho^-(\gamma) = \gamma.\mathcal{U}^-, && \text{où } \gamma \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}^0_{\mathbf{R}}, \mathrm{K}_\Lambda). \end{aligned}$$

Théorème 2. — *Les applications ρ_g, ρ_b, ρ_t et ρ^- sont bijectives. Chacune d'elles induit une bijection de l'ensemble des éléments inversibles $\mathcal{H}om^1(\mathcal{E}, \mathrm{L})$ sur $\mathcal{T}hom\,(\mathcal{E}, \mathrm{L})$ (l'ensemble des classes de Thom).*

Dans les trois cas du théorème 1, on définit l'application τ par composition :

$$\tau : \mathcal{H}om^0(\mathcal{E}, \mathrm{L}) = \mathrm{Im}\,\tilde{j} \xrightarrow{\tilde{j}^{-1}} \mathcal{F}on\,(\mathcal{E}, \mathrm{L}) \xrightarrow{\rho^{-1}} \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathrm{L}).$$

Elle intervient dans le théorème de Riemann-Roch différentiable. Le composé du caractère de Chern avec le conjugué de l'algèbre extérieure alternée : $\mathrm{ch}\,\bar{\lambda}\circ_{-1} \in \mathcal{H}om^0(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathrm{H}^{2*}_{\mathbf{Q}})$ satisfait à la relation

$$\tau(\mathrm{ch} \circ \bar{\lambda}_{-1}) = \mathrm{Todd}^{-1},$$

l'inverse de la classe de Todd.

3. La démonstration des théorèmes ci-dessus se déduit du lemme suivant :

Lemme. — *Le sous-groupe de torsion du groupe de Grothendieck* $\mathrm{K}\,(\mathrm{MSO}\,(2\,n))$ *de l'espace de Thom universel* $\mathrm{MSO}\,(2\,n)$ *est* 2-primaire *et isomorphe à* $\mathrm{K}^1(\mathcal{S}(2\,n))$, *où* $\mathcal{S}(2\,n)$ *est le fibré en sphères associé au fibré, universel du groupe* $\mathrm{SO}(2\,n)$. *En outre, l'homomorphisme induit par la section nulle et l'inclusion de l'espace classifiant* BT_n *du tore maximal* T_n *de* $\mathrm{SO}(2\,n)$:

$$\mathrm{K}\,(\mathrm{MSO}\,(2\,n))/\mathrm{K}^1(\mathcal{S}(2\,n)) \to \mathrm{K}\,(\mathrm{BT}_n) \approx \mathbf{Z}\,[[t_1, \ldots, t_n]]$$

est injectif; son image se compose des séries formelles qui sont symétriques divisibles par $t_1 \ldots t_n$ et invariantes par le produit d'un nombre pair de substitutions de la forme

$$t_i \to (1 + t_i) - (1 + t_i)^{-1}.$$

(*) Séance du 9 juin 1965.

(1) M. F. Atiyah et F. Hirzebruch, *Vector bundles and homogeneous spaces* (*Proceedings of Symposia of the American Mathematical Society*, III, 1961.

(2) A. Borel et J. P. Serre, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 86, 1958, p. 97-136.

(3) R. Bott, *Lectures on* K (X), Harvard University, 1962.

(4) H. Cartan, Séminaire Cartan, 1961-1962, Exp. n° 1.

(5) A. Grothendieck, *Classes de faisceaux et théories de Riemann-Roch*, Princeton Notes, 1956.

(6) L. Illusie, Séminaire Cartan, 1963-1964.

(7) J. Milnor, *Lecture on Characteristic classes*, Princeton, 1956.

(8) R. Palais, *Differential operators on vector bundles* (Seminar on the Atiyah-Singer Index, Theorem, I. A. S., Princeton, 1963-1964).

(9) W. Shih, *Non stable characteristic class and topological index of classical elliptic operators* (Seminar on the Atiyah-Singer Index, Theorem, I. A. S., Princeton, 1963-1964).

(10) R. Thom, *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, 69, 1952, p. 109-182.

(Institut des Hautes Études Scientifiques,
Bures-sur-Yvette, Seine-et-Oise.)