

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1965-06-01.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

TOPOLOGIE. — *Une remarque sur les classes de Thom.*
 Note (*) de M. WEISHU SHIH, transmise par M. Henri Cartan.

1. Désignons par $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(X)$ [resp. $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0(X)$, $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(X)$] le semi-groupe commutatif (monoïde abélien) des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels complexes sur un CW-complexe fini X (resp. fibrés réels orientés de dimension paire, et fibrés réels orientés) par rapport à la somme de Whitney \oplus . Rappelons que $K(X)$ [resp. $KSO(X)$] est le groupe de Grothendieck de $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(X)$ [resp. $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(X)$]; on pose

$$K^*(X) = K^0(X) \oplus K^1(X),$$

où $K^0(X) = K(X)$, $K^1(X) = \tilde{K}(\Sigma X)$ (ΣX la suspension de X et \sim le groupe résult) (1), et

$$H^{2*}(X) = \prod_i H^{2i}(X), \quad H^*(X) = \prod_i H^i(X).$$

On note A un anneau commutatif avec unité contenant $1/2$, et l'on pose

$$K_A(X) = K(X) \otimes_{\mathbf{Z}} A, \quad K_A^*(X) = K^*(X) \otimes_{\mathbf{Z}} A.$$

K (resp. H^{2*} , ...) sont des foncteurs contravariants de la catégorie des CW-complexes dans celle des semi-groupes, la structure de semi-groupe étant définie par le produit tensoriel (resp. le cup-produit). Dans la suite, L désigne l'un des foncteurs K_A , K_A^* , H^{2*} , H^* , et \mathcal{E} l'un des foncteurs $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}$, $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0$, $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}$; on notera

$$\mathcal{H}om(\mathcal{E}, L)$$

le semi-groupe des morphismes de foncteurs; un tel morphisme sera aussi appelé une « classe caractéristique ». Notons $\mathcal{H}om^1(\mathcal{E}, L)$ le sous-groupe formé par les éléments *inversibles* de $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, L)$. On a évidemment

$$\mathcal{H}om^1(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, L) \approx \mathcal{H}om(K, L), \quad \mathcal{H}om^1(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}, L) \approx \mathcal{H}om(KSO, L).$$

Exemples. — La classe d'Euler $\gamma \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, H^{2*})$. L'algèbre extérieure $\lambda_1(\xi)$ et l'algèbre extérieure alternée $\lambda_{-1}(\xi)$ de Grothendieck (2) d'un fibré complexe ξ définissent des éléments $\lambda_1, \lambda_{-1} \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, K)$. Nous désignons par $\lambda_0^- \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, K)$ l'élément caractérisé (3) par la condition : « Pour tout fibré η orienté réel de dimension 2, on a

$$\lambda_0^-(\eta) = \xi - \bar{\xi},$$

où ξ est l'unique fibré complexe isomorphe à η comme fibré réel et $\bar{\xi}$ son conjugué ». $\lambda^- \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, K_A)$ est défini par $\lambda^- = (1/2)\lambda_0^-$.

Nous désignons par $\dot{\eta}$ l'espace de Thom (10) d'un fibré vectoriel réel η (resp. complexe) et par $j: X \rightarrow \dot{\eta}$ l'application induite par la section

nulle de η . La structure multiplicative de L induit des produits externes

$$\begin{aligned} L(X) \otimes \tilde{L}(\eta_1) &\rightarrow \tilde{L}(\eta_1), \\ \tilde{L}(\eta_1) \otimes \tilde{L}(\eta_2) &\rightarrow \tilde{L}(\eta_1 \oplus \eta_2) \quad [\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(X)] \end{aligned}$$

[où $\tilde{L}(\eta) = L(\eta, e)$, $e =$ le point d'identification de l'espace de Thom] qu'on notera multiplicativement.

2. DÉFINITION. — Une classe fondamentale \mathcal{U} pour (\mathcal{E}, L) est la donnée, pour chaque fibré vectoriel $\eta \in \mathcal{E}(X)$, d'un élément $\mathcal{U}(\eta) \in \tilde{L}(\eta)$ vérifiant les conditions :

- (i) $\mathcal{U}(\eta)$ est fonctoriel par rapport à l'image réciproque des fibrés ;
- (ii) \mathcal{U} est multiplicative, c'est-à-dire

$$\mathcal{U}(\eta_1) \cdot \mathcal{U}(\eta_2) = \mathcal{U}(\eta_1 \oplus \eta_2) \quad \text{pour } \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{E}(X).$$

Une classe fondamentale \mathcal{U} est dite une classe de Thom, si le morphisme

$$\varphi: L(X) \rightarrow \tilde{L}(\eta)$$

défini par $\varphi(x) = x \mathcal{U}(\eta)$ est un isomorphisme de Λ -modules.

Désignons dans la suite par

$$\mathcal{Thom}(\mathcal{E}, L) \quad \mathcal{Fon}(\mathcal{E}, L)$$

l'ensemble des classes de Thom et celui des classes fondamentales pour (\mathcal{E}, L) .

Exemple. — L'opérateur elliptique D_0 ⁽⁸⁾ d'une variété riemannienne orientée de dimension paire conduit à définir, pour tout fibré vectoriel orienté de dimension paire, une classe fondamentale de l'espace de Thom ⁽⁹⁾. On notera $\mathcal{U}_0^- \in \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{K})$ le morphisme de foncteur ainsi défini; on vérifie (cf. exemple § 1) que $\tilde{j}(\mathcal{U}_0^-) = \lambda_0^-$.

Soit

$$\tilde{j}: \mathcal{Fon}(\mathcal{E}, L) \rightarrow \mathcal{HCom}(\mathcal{E}, L)$$

l'homomorphisme induit par la section nulle j : pour toute $\mathcal{U} \in \mathcal{Fon}(\mathcal{E}, L)$, $\tilde{j}(\mathcal{U})$ est défini par : $\tilde{j}(\mathcal{U})(\eta) = j^*(\mathcal{U}(\eta))$, où $\eta \in \mathcal{E}(X)$ et

$$j^*: L(\eta) \rightarrow L(X).$$

THÉORÈME 1. — L'homomorphisme \tilde{j} est injectif dans chacun des trois cas suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1: \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathbf{K}) &\rightarrow \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathbf{K}); \\ \tilde{j}_2: \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{H}^{2*}) &\rightarrow \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{H}^{2*}); \\ \tilde{j}_3: \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{K}_{\Lambda}) &\rightarrow \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{K}_{\Lambda}). \end{aligned}$$

L'image de \tilde{j}_1 se compose des α tels que $\alpha(1_{\mathbf{C}}) = 0$, où $1_{\mathbf{C}}$ est le fibré trivial complexe de dimension un. L'image de \tilde{j}_2 , resp. \tilde{j}_3 se compose des β tels que $\beta(2_{\mathbf{R}}) = 0$, où $2_{\mathbf{R}}$ est le fibré réel trivial de dimension 2.

On peut remarquer que l'algèbre extérieure alternée λ_{-1} vérifie $\lambda_{-1}(1_{\mathbf{C}}) = 0$, donc il existe une unique classe fondamentale, dite de Grothendieck ^(*)

$\mathfrak{u}_g \in \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathbf{K})$, telle que $\tilde{j}(\mathfrak{u}_g) = \bar{\lambda}_{-1}$. De même, il existe une classe fondamentale de Bott ⁽³⁾ \mathfrak{u}_b , telle que $\tilde{j}(\mathfrak{u}_b) = \bar{\lambda}^{-1}$. L'unique classe fondamentale $\mathfrak{u}_l \in \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbb{H}^{2^*})$ telle que $\tilde{j}(\mathfrak{u}_l) =$ la classe d'Euler, n'est autre que la classe de Thom $[(^0), (^0)]$. On désigne par $\mathfrak{u}^- \in \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{K}_{\Lambda})$, l'unique classe fondamentale telle que $\tilde{j}(\mathfrak{u}^-) = \bar{\lambda}^-$.

Remarque. — Le morphisme canonique $\theta : \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathbf{K})$ induit par le fibré réel orienté sous-jacent d'un fibré complexe, vérifie $\theta(\mathfrak{u}_b^-) = \lambda_1 \cdot \mathfrak{u}_b$.

Définissons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_g, \rho_b : \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathbf{K}) &\rightarrow \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}^0, \mathbf{K}); \\ \rho_l : \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbb{H}^{2^*}) &\rightarrow \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbb{H}^{2^*}); \\ \rho^- : \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{K}_{\Lambda}) &\rightarrow \mathcal{Fon}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{K}_{\Lambda}) \end{aligned}$$

par les formules

$$\begin{aligned} \rho_g(\alpha) &= \alpha \cdot \mathfrak{u}_g, & \rho_b(\alpha) &= \alpha \cdot \mathfrak{u}_b, & \text{où } \alpha &\in \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathbf{K}); \\ \rho_l(\beta) &= \beta \cdot \mathfrak{u}_l, & & & \text{où } \beta &\in \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbb{H}^{2^*}); \\ \rho^-(\gamma) &= \gamma \cdot \mathfrak{u}^-, & & & \text{où } \gamma &\in \mathcal{HCom}(\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^0, \mathbf{K}_{\Lambda}). \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. — *Les applications ρ_g, ρ_b, ρ_l et ρ^- sont bijectives. Chacune d'elles induit une bijection de l'ensemble des éléments inversibles $\mathcal{HCom}^1(\mathcal{E}, \mathbf{L})$ sur $\mathcal{Thom}(\mathcal{E}, \mathbf{L})$ (l'ensemble des classes de Thom).*

Dans les trois cas du théorème 1, on définit l'application τ par composition :

$$\tau : \mathcal{HCom}^0(\mathcal{E}, \mathbf{L}) = \text{Im } \tilde{j} \xrightarrow{\tilde{j}^{-1}} \mathcal{Fon}(\mathcal{E}, \mathbf{L}) \xrightarrow{\theta^{-1}} \mathcal{HCom}(\mathcal{E}, \mathbf{L}).$$

Elle intervient dans le théorème de Riemann-Roch différentiable. Le composé du caractère de Chern avec le conjugué de l'algèbre extérieure alternée : $\text{ch } \bar{\lambda}_{-1} \in \mathcal{HCom}^0(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathbb{H}_{\mathbf{Q}}^{2^*})$ satisfait à la relation

$$\tau(\text{ch} \circ \bar{\lambda}_{-1}) = \text{Todd}^{-1},$$

l'inverse de la classe de Todd.

3. La démonstration des théorèmes ci-dessus se déduit du lemme suivant :

LEMME. — *Le sous-groupe de torsion du groupe de Grothendieck $\mathbf{K}(\text{MSO}(2n))$ de l'espace de Thom universel $\text{MSO}(2n)$ est 2-primaire et isomorphe à $\mathbf{K}^1(\mathcal{S}(2n))$, où $\mathcal{S}(2n)$ est le fibré en sphères associé au fibré, universel du groupe $\text{SO}(2n)$. En outre, l'homomorphisme induit par la section nulle et l'inclusion de l'espace classifiant BT_n du tore maximal T_n de $\text{SO}(2n)$:*

$$\mathbf{K}(\text{MSO}(2n))/\mathbf{K}^1(\mathcal{S}(2n)) \rightarrow \mathbf{K}(\text{BT}_n) \approx \mathbf{Z}[[t_1, \dots, t_n]]$$

est injectif; son image se compose des séries formelles qui sont symétriques divisibles par $t_1 \dots t_n$ et invariantes par le produit d'un nombre pair de substitutions de la forme

$$t_i \rightarrow (1 + t_i) - (1 + t_i)^{-1}.$$

- (*) Séance du 9 juin 1965.
- (¹) M. F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, *Vector bundles and homogeneous spaces* (*Proceedings of Symposia of the American Mathematical Society*, III, 1961).
- (²) A. BOREL et J. P. SERRE, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 86, 1958, p. 97-136.
- (³) R. BOTT, *Lectures on K(X)*, Harvard University, 1962.
- (⁴) H. CARTAN, Séminaire Cartan, 1961-1962, Exp. n° 1.
- (⁵) A. GROTHENDIECK, *Classes de faisceaux et théories de Riemann-Roch*, Princeton Notes, 1956.
- (⁶) L. ILLUSIE, Séminaire Cartan, 1963-1964.
- (⁷) J. MILNOR, *Lecture on Characteristic classes*, Princeton, 1956.
- (⁸) R. PALAIS, *Differential operators on vector bundles* (Seminar on the Atiyah-Singer Index, Theorem, I. A. S., Princeton, 1963-1964).
- (⁹) W. SHIH, *Non stable characteristic class and topological index of classical elliptic operators* (Seminar on the Atiyah-Singer Index, Theorem, I. A. S., Princeton, 1963-1964).
- (¹⁰) R. THOM, *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, 69, 1952, p. 109-182.

(Institut des Hautes Études Scientifiques,
Bures-sur-Yvette, Seine-et-Oise.)