LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES DE PONTRJAGIN DES VARIÉTÉS TRIANGULÉES

PAR R. THOM

Avant de nous occuper des variétés polyèdrales, il nous sera utile de généraliser quelque peu la notion de polyèdre. Introduisons dans ce but la notion d'"espace différentiable par morceaux."

Structure différentiable par morceaux

Un espace E est dit "différentiable par morceaux" de classe C^m s'il peut être défini ainsi qu'il suit: on se donne des ouverts U^n d'espace euclidien R^n, n variable, et une famille d'applications différentiables de classe C^m $g_{\alpha\beta} : U^n_\alpha \to U^p_\beta$; dans ces conditions, E est le quotient de la réunion $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ des U_α par les relations d'identification définies par les applications $g_{\alpha\beta}$ (ou un sous-espace de ce quotient).

Sur un tel espace différentiable par morceaux, on a la notion de fonction réelle de classe C^m (et même la notion de forme différentielle). La notion de dérivée partielle d'une fonction peut être définie dans chaque ouvert U_α; il en résulte qu'on peut parler, sur E, de l'espace D^m des fonctions de classe C^m, muni de la topologie définie par l'écart sur les dérivées partielles d'ordre r ($r \leq m$). De même pour les applications de E dans un espace euclidien. Tous ces espaces sont métriques complets, donc de Baire.

Il importe de dire tout de suite que, si l'on n'impose aucune condition aux relations d'identification $g_{\alpha\beta}$, l'espace E a toutes chances de se trouver muni d'une topologie fortement dégénérée, en général non séparée. De ce fait, il n'est pas impossible qu'il n'existe sur E d'autres fonctions différentiables que les constantes. D'ailleurs, certains espaces de ce type s'introduisent dans l'étude des feuilletages de variétés, comme quotients des structures feuilletées.

Nous ferons sur les espaces E des hypothèses assez restrictives:

(1) Les applications $g_{\alpha\beta}$ sont des *injections*, partout de rang maximum; il suffira de se donner des applications $g_{\alpha\beta} : U^{n-K}_\alpha \to U^n_\beta$, les autres s'en déduisant par transitivité.

(2) On suppose que l'intersection de deux U^n_α est contenue toujours dans une réunion de U^{n-1} de dimension inférieure.

(3) *Hypothèse de position générale.* Soient $g : U^p_\alpha \to U^n_\gamma$, $U^{p'}_\beta \to U^n_\gamma$ deux injections; si U^p_α n'est pas contenu dans $U^{p'}_\beta$, alors les images $g(U^p_\alpha)$, $g(U^{p'}_\beta)$ sont des sous-variétés de U^n_γ qui se coupent en tout point commun *en position générale*: En un point x commun à $g(U^p_\alpha)$, $g(U^{p'}_\beta)$ les plans tangent à ces sous-variétés se coupent suivant un q-plan dont la codimension (par rapport à U^n_γ) est somme des codimensions de $g(U^p_\alpha)$, $g(U^{p'}_\beta)$. Ce q-plan est d'ailleurs le q-plan tangent au U d'intersection auquel appartient x. De même pour l'intersection de plusieurs $g(U^p_\alpha)$ incidents à un même U^n_γ.

Il est clair qu'un complexe simplicial K est susceptible d'une définition de cette espèce: il suffit d'attacher à tout p-simplexe s_p une boule ouverte B_p le contenant rectilinéairement; on prend pour K la portion de l'espace E obtenue à partir des B_p par identification en ne conservant, pour chaque B_p, que la portion d'espace intérieure à s_p. Finalement, les espaces que nous considérons "généralisent" les polyèdres au sens suivant: les "cellules" U ne sont pas nécessairement homologiquement triviales; ce sont seulement des variétés à bord (connexes paracompactes) dont le bord peut présenter des singularités du type suivant: les cellules qui composent le bord se coupent dans U en position générale. Bien entendu, les espaces ainsi obtenus sont encore des polyèdres, en vertu des théorèmes généraux de triangulation des variétés différentiables (J. H. C. Whitehead [6]).

On va étendre aux applications différentiables de polyèdres les théorèmes de régularisation connus pour les variétés. Enonçons dans ce but un Lemme.

Lemme de position générale. *Soit* (G) *un ensemble de plans de* R^n *(considéré comme espace affine); on suppose que les plans de* (G) *se coupent en position générale. Soit* F *une fonction réelle sur* G, *de classe* C^m *sur chacun des plans de* (G); *alors* F *est la restriction à* (G) *d'une fonction* F_1 *de classe* C^m *sur* R^n.

L'extension de la fonction F en F_1 va se démontrer par induction sur le nombre r des plans qui composent (G). Pour $r = 1$, la propriété est presque évidente: on forme un voisinage tubulaire T du plan X, de rayon a, et on définit une rétraction différentiable $p : T \to X$ sur le plan X; désignons par $g(u)$ une fonction de classe C^∞, décroissant de 1 à 0 lorsque u croit de 0 à a. Pour tout point x extérieur à T, on posera $F_1(x) = 0$, pour un point x de T situé à la distance u de X, on posera $F_1(x) = g(u)F(p(x))$. Si les dérivées $d^kg/(du)^k$ ont été supposées nulles pour $u = 0$ et $u = a$, alors la fonction F_1 est de classe C^m et répond à la question.

Supposons le lemme établi pour un système (G_1) de $(r - 1)$ plans, et soit (X) un plan qu'on ajoute à (G_1). Le plan (X) coupe par hypothèse tout plan de (G_1) en position générale; on pourra par suite définir sur un voisinage de (X) une métrique riemannienne pour laquelle tout plan de (G_1) coupe (X) orthogonalement; grâce à cette métrique, on définira un voisinage tubulaire T de (X), de rayon géodésique a, et une rétraction différentiable normale $p : T \to X$, telle que $p(T \cap Y) = Y \cap X$ pour tout plan Y de (G_1). Soit f la fonction donnée sur $(G) = (G_1) \cup X$; par induction il existe une fonction F, de classe C^m sur R^n, qui coincide avec f sur (G_1); formons sur (X) la fonction $v = f - F$; v, de classe C^m, est nulle sur l'intersection $G_1 \cap X$. On applique alors la construction précédente à la fonction v pour X seul; comme la rétraction p conserve (G_1), on obtient une fonction $w = g(u(x)) \cdot v(p(x))$ de classe C^m, qui est nulle sur (G_1). Par suite la somme

$$F_1 = F + w$$

répond bien à la question.

Remarque. L'hypothèse que les plans de (G) se coupent en position générale joue un rôle absolument essentiel dans cette démonstration. On obtiendra un contre-exemple très simple en prenant pour (G) trois droites concourantes du plan, par exemple les axes Ox, Oy et la première bissectrice $x = y$. Une fonction f

dérivable sur ces trois droites n'est la restriction d'une fonction différentiable du plan que si les dérivées de f le long de ces trois droites en 0 satisfont à une relation linéaire évidente.

Point régulier; valeur régulière d'une application

Soit f une application de classe C d'une polyèdre K dans l'espace euclidien R^k; on dira qu'un point x est régulier pour l'application f si, pour toute cellule U contenant x, l'application f, restreinte à U, admet en x un point régulier, i.e., un point où le rang de f est *égal* à k.

Il résulte de cette définition que tous les points du squelette de dimension $(k-1)$ sont nécessairement non réguliers.

Une valeur $y \in R^k$ de f sera dite *régulière* si l'image réciproque $f^{-1}(y)$ ne contient que des points réguliers (ou aucun point!).

Théorème de Sard. *Si un complexe K est de dimension n, et si K ne comporte qu'une infinité dénombrable au plus de cellules, toute application f de K dans R^k n'admet de valeurs non régulières que sur un ensemble de mesure nulle de R^k, dés que sa classe m est $\geqq n-k+1$.*

Généralisation immédiate du théorème classique [3].

Théorème de la fibration. *Soit f une application de K dans R^k, régulière sur un point O de R^k ainsi que sur tout point d'une boule ouverte U de centre O, de rayon r. Si l'application f est de plus propre sur U (i.e., l'image réciproque de tout compact est un compact), alors l'application f définit une fibration de $f^{-1}(U)$ sur U.*

On construit dans $f^{-1}(U)$ un champ de k-plans transverses aux images réciproques $f^{-1}(y)$, et ceci dans chaque cellule Z_j de K. Une telle construction est évidemment possible pour toute cellule Z_k du k-squelette; en effet $Z_k \cap f^{-1}(U)$ est appliqué par f avec rang maximum sur U, et le k-plan transverse est évidement, en tout point de $Z_k \cap f^{-1}(U)$, le plan des vecteurs tangents à Z_k.

Supposons construit le champ H de k-plans transverses sur le $(r-1)$-squelette $K^{(r-1)}$; il faut montrer que la prolongation de H est possible de façon différentiable sur le r-squelette. Soit Z_r une r-cellule; sur $Z_r \cap f^{-1}(U)$ les coordonnées $u_1, u_2, \cdots, u_k$ de U peuvent être prises comme fonction coordonnées; par suite, en tout point x de $Z_r \cap f^{-1}(U)$ l'ensemble des k-plans transverses est représenté, dans une carte locale $(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_{r-k})$ par tous les systèmes linéaires de la forme:

$$v_j = \sum a_j^i u_i.$$

C'est donc un espace vectoriel de coordonnées a_j^i, de dimension $k \cdot (r-k)$. L'ensemble des k-plans transverses aux images réciproques constitue donc un fibré sur $Z_r \cap f^{-1}(U)$, à fibre vectorielle. Une section de ce fibré nous est déjà donnée sur le bord Z_r par le champ H; la fibre étant contractile, la section peut se prolonger de façon continue sur tout $Z_r \cap f^{-1}(U)$. Par ailleurs, en vertu du lemme de position générale, ce prolongement pourra s'effectuer de façon différentiable sur un voisinage du bord, donc partout.

On a ainsi établi l'existence, dans $f^{-1}(U)$, d'un champ H de k-plans transverses aux images réciproques $f^{-1}(y)$. Ce champ n'est pas, en général, intégrable dans chaque

Z_r; il peut néanmoins servir à définir des transversales par le procédé suivant: A tout point y de U associons la demi-droite Oy; dans toute cellule Z_r l'image réciproque $f^{-1}(Oy)$ est une sous-variété de dimension $r - k + 1$; dans cette sous-variété, le champ H définit un système de trajectoires différentiables H_y; ce système de trajectoires transversales H_y permet de définir un homéomorphisme de $f^{-1}(O)$ sur $f^{-1}(y)$ (car, puisque f est propre, $f^{-1}(Oy)$ est compact, et toute trajectoire peut être prolongée de $f^{-1}(O)$ a $f^{-1}(y)$). L'homéomorphisme h_y ainsi défini dépend continuement de y et permet de définir un homéomorphisme global h de $f^{-1}(U)$ sur $U \times f^{-1}(O)$, ce qui démontre le théorème.

Etant donné un polyèdre K on montrera, comme dans [5], que l'ensemble des applications $f: K \to R^k$ qui n'admettent pas un point donné comme valeur régulière forme un sous-ensemble rare de $L(K;\ R,\ m)$ pourvu que m soit assez grand (maigre, si K est infini paracompact.)

Applications t-régulières sur une sous-variété

Soit N une sous-variété diff. plongée d'une variété M^p; si N est de codimension q, on peut supposer N définie par un système de cartes locales du type $U \to R^q$; comme dans [5], un point $x \in K$ est t-régulier sur N si l'application composée $g \circ f(x) \to R^q$ admet x pour point régulier; l'application f de K dans M est t-régulière sur la sous-variété N si tout point de l'image réciproque $f^{-1}(N)$ est t-régulier sur N.

Comme dans [5] on montera que l'ensemble des applications f de K dans M non t-régulières sur N est un fermé rare de $L(K,\ V;\ m)$ si K est compact et m assez grand (maigre si K est dénombrable..).

Remarque. On sait que si f est une application simpliciale de K sur K', l'application f définit une fibration locale sur l'intérieur de tout simplexe de dimension maximum de K'. Le théorème de fibration est donc connu pour les applications simpliciales mais il parait difficile d'adapter la notion de "t-régularité" au cadre des applications simpliciales. C'est ce qui justifie l'introduction des structures différentiables par morceaux.

Variétés triangulées

Par variété triangulée, on entend un polyèdre qui est homologiquement une variété de dimension n: i.e., les nombres de Betti locaux autour de chaque point sont ceux de la n-boule ouverte. Il n'est donc pas nécessaire que le voisinage de tout point soit une boule topologique.

Image réciproque d'une valeur régulière. Soit V^n une variété triangulée de dimension $n, f: V \to R^k$ une application régulière sur 0. L'image réciproque $f^{-1}(0)$ est dans ces conditions une variété triangulée de dimension $(n - k)$.

Ceci résulte du fait qu'on peut trouver pour tout point x un système fondamental de voisinages qui soient la fois saturés pour les images réciproques $f^{-1}(y)$, et un système de transversales (H). En vertu des théorèmes classiques sur les fibrations d'espaces euclidiens, la fibre est une sous-variété homologique de dimension $(n - k)$. (Il importe de remarquer qu'on peut définir en x une famille fondamentale de voisinages du type ci-dessus qui sont homéomorphes: ceci résulte du fait que $f^{-1}(y)$ est un polyèdre, donc tout point x a un voisinage conique dans $f^{-1}(y)$; ce qui a pour effet que ces voisinages ont même cohomologie que la limite inductive, donc celle de l'espace euclidien R^n).

Ce résultat se généralise immédiatement aux images réciproques par des applications t-régulières. On a:

Si une application $f: V^n \to M^p$ est t-régulière sur la sous-variété N de codimension q, l'image réciproque $f^{-1}(N)$ est une sous-variété homologique de codimension q.

Ce résultat s'étend également aux variétés à bord: si Q^n est une variété à bord triangulée, de bord V, et si $f: Q^n$ est t-régulière sur $N \subset M$, l'image réciproque par f de N est une sous-variété à bord homologique X, de codimension q, dont le bord Y est une sous-variété Y de V, de codimension q (également homologique).

Nous allons maintenant définir entre variétés triangulées une relation d'équivalence qui généralise quelque peu la notion d'équivalence combinatoire.

Définition. *Variétés J-équivalentes.* Deux variétés triangulées V, V' seront dites J-équivalentes si: (1) Elles ont toutes deux même type d'homotopie (T); (2) Elles sont cobordantes et il existe une variété à bord triangulée Q admettant pour bord $V \cup V'$ ($V - V'$ si V et V' sont orientées), dont le type d'homotopie est (T), et telle que les injections $i: V \to Q$, $i': V \to Q$ soient des homotopies-équivalences.

Dans ces conditions, chacune des variétés V, V' est rétracte par déformation de Q; la construction usuelle faite sur les variétés cobordantes montre qu'on a bien là une relation d'équivalence; il y a transitivité. On ne connait pas d'exemple de variétés ayant même type d'homotopie qui ne soient pas cobordantes; par contre, il existe des variétés (de dimension 7) qui ont même type d'homotopie, mais ne satisfont pas à la condition (2), et ne sont donc pas J-équivalentes.

Définition. *Sous-variétés à structure orthogonale.* On dira qu'une sous-variété W de V^n, de codimension q, est *à* structure orthogonale normale, s'il existe une application f de V dans le complexe $M(SO(q))$, t-régulière sur la grassmannienne G_q, telle que W soit l'image réciproque par f de la grassmannienne G_q.

Une sous-variété à structure normale orthogonale admet des classes caractéristiques normales (de Stiefel-Whitney et de Pontrjagin), images par f^* des classes corresopndantes de la grassmannienne G_q. Dans le cas ou V^n est différentiable, ainsi que f, ces classes sont les classes caractéristiques du fibré des vecteurs normaux. Dans le cas généralisé des variétés triangulées, il n'y a plus de fibré des vecteurs normaux au sens strict. Le plongement à structure normale orthogonale jouit de plus de la propriété de transitivité énoncée dans le lemme:

Lemme 1. *Soit P^{n-q} une sous-variété à structure normale orthogonale de la variété V^n, W^{n-q-r} une sous-variété à structure orthogonale normale de P^{n-q}; dans ces conditions, W^{n-q-r} est une sous-variété à structure orthogonale normale de V^n, et cette structure a mêmes classes caractéristiques que le "joint" (au sens de Whitney) de la structure normale de W dans P par la restriction à W de la structure normale de P dans V.*

Soient $f: P \to M(SO(r))$, $g: V \to M(SO(q))$ les applications qui définissent $W = f^{-1}(G_r)$, $P = g^{-1}(G_q)$. On peut supposer que l'application g plonge biunivoquement P dans G_q, de telle façon que des plans tangents à des cellules incidentes se coupent en position générale. L'application donnée $f : P \to M(SO(r))$ se prolonge différentiablement à un voisinage U de $g(P)$ dans G_q; soit f_1 ce prolongement $f_1 : U \to M(SO(r)$; on peut supposer f_1 t-régulière sur G_r, puisque f_1 l'est, restreinte à P; alors l'image réciproque par f_1 de G_r dans U est une sous-variété Z de codimension r dans U, donc de codimension $(q + r)$ dans $M(SO(q))$. La structure normale de Z dans $M(SO(q))$ est le joint de la structure normale induite de G_r par f_1, et de la restriction à Z de la structure normale à G_q dans $M(SO(q))$; l'application $g : V \to M(SO(q))$ est t-régulière sur Z, et l'on a $W = g^{-1}(Z)$. Ceci démontre la propriété énoncée.

La fonction τ

Deux applications f, g de V^n dans $M(SO(q))$, t-régulières sur G_q, *homotopes*, définissent des sous-variétés W, W' images réciproques de G_q par f et g qui sont L-équivalentes au sens de [5] (il ne s'agit ici, toutefois, que de variétés homologiques). Par suite, les index $\tau(W)$, $\tau(W')$ sont égaux. Ainsi: à toute classe d'homotopie d'applications de V^n dans $M(SO(q))$ est attachée de façon invariante l'index des sous-variétés réalisantes. C'est cette fonction τ qui va nous permettre de définir des classes de Pontrjagin rationnelles dans la cohomologie de V. Le résultat précédent se généralise légérement comme suit: si V et V' sont deux variétés J-équivalentes (donc de même type d'homotopie), les ensembles de L-classes de V et V' sont isomorphes, l'isomorphisme de $L_k(V)$ sur $L_k(V')$ étant induit par une homotopie-équivalence de V' sur V. Dans ces conditions, deux L-classes homologues de V, V' sont réalisées par des sous-variétés W, W' qui sont cobordantes dans la variété X de bord $V' - V$; donc $\tau(W) = \tau(W')$. La fonction τ est ainsi un invariant pour la classe de J-équivalence de V. En particulier, c'est un *invariant combinatoire* pour toute variété triangulée V: en effet, deux variétés triangulées V, V' qui admettent des subdivisions isomorphes sont de ce fait J-équivalentes.

Dans [1], F. Hirzebruch a introduit une fonction $\tau(u, v \cdots w)$ qui attache à tout système de classes de cohomologie de dimension 2 de V l'index de la sous-variété intersection complète des hypersurfaces duales aux classes u, $v \cdots w$. Ce système de classes définit évidemment une L-classe, et la fonction index virtuel de Hirzebruch rentre ainsi dans le cas général de la fonction $\tau(L_k)$. Par suite, cette fonction est un invariant combinatoire de V^n. On verra plus tard que le symbolisme de Hirzebruch se généralise au cas combinatoire; on pourra démontrer, en conséquence, la relation fonctionnelle

$$\tau(u + v, w) = \tau(u, w) + \tau(v, w) - \tau(u, v, u + v, w)$$

comme dans le cas différentiable considéré par Hirzebruch.

Ceci nécessitera une définition généralisée des classes de Pontrjagin à l'aide de la fonction τ. Nous aurons besoin, dans ce but, d'un lemme de pure homotopie, énoncé ci-dessous:

LEMME 2. *Soit K un complexe fini, de dimension n, B un complexe fini tel que $\pi_j(B) = 0$ pour $j < m$. Si $n < 2m - 2$, l'ensemble des applications de K dans B*

est muni d'une loi d'addition (cohomotopie), et l'ensemble des classes d'applications de K dans B forme un groupe abélien $G(K; B)$. Si on désigne par $\mathscr{C}$ la classe des groupes finis (au sens de J. P. Serre [4]), *alors $G(K; B)$ est isomorphe* mod $\mathscr{C}$ *au groupe* Hom $(H_*(K; Z), H_*(B; Z))$.

Ou encore: $G(K; B) \otimes Q$ *(Q corps des rationnels) est isomorphe au groupe* Hom $(H^*(B; Q), H^*(K; Q)$.

Il suffit de démontrer la propriété suivante: Si deux applications f, g de K dans B induisent le même homomorphisme f_*, g_*; $H_*(K; Z) \to H_*(B; Z)$, alors il existe un entier non nul N tel que les multiples $N \cdot f$ et $N \cdot g$ soient homotopes.

En appliquant la propriété à la différence $f - g$, on se ramène à démontrer. Si une application f de K dans B induit un homomorphisme $f_* : H_*(K; Q) \to H_*(B; Q)$ qui est nul, il existe un entier $\neq 0$ N tel que $N \cdot f$ soit homotope à zéro.

Il est clair qu'on peut tout d'abord trouver un multiple $g = N_1 \cdot f$ tel que l'homomorphisme g induit par g sur les x homologies *entières* $g_* : H_*(K; Z) \to H_*(B; Z)$ soit nul. Soit T le cone sur K. On se propose d'étendre l'application g de K à T; on se heurte à des obstructions qui sont des classes de $H^{q+1}(T, K; \pi_q(B)) \cong H_q(K; \pi_q(B))$. Or, d'après un résultat classique en $\mathscr{C}$-théorie, l'homomorphisme de Hurewicz $\pi_i(B) \to H_i(B; Z)$ est un $\mathscr{C}$-isomorphisme pour $i < 2m$. Si $\pi_q(B)$ est d'ordre fini m, toute classe obstruction $w \in H^q(K; \pi_q(B))$ peut être annulée en remplaçant l'application g par sa multiple $m \cdot g$. Si $\pi_q(B)$ n'est pas fini, on lui substitue le groupe $\mathscr{C}$-isomorphe $H_q(B; Z)$; la classe $\bar{w}$, image de $w \in H^q(K; \pi_q(B))$, n'est autre que l'image par g^* de la classe fondamentale Hom $H_q(B); H_q(B)) \cong H^q(B; H_q(B; Z))$. Par suite, cette image $\bar{w}$ est nulle mod $\mathscr{C}$, et l'extension est possible après une éventuelle multiplication.

Nous sommes maintenant en mesure de définir les

Classes de Pontrjagin rationnelles. *On attache à toute variété triangulée orientée V (ainsi qu'a toute variété à bord orientée) un système de classes $p_i \in H^{4i}(V; Q)$, univoquement définies par les axiomes suivants:*

(1) $p^0 = 1$.

(2) Théorème de "dualité". *Si W désigne une sous-variété de V^n à structure normale orthogonale (de classes normales n_i, de classes "tangentes" q_j), et si i désigne l'injection de W dans V; on a:*

$$(1)\quad i^*(1 + p_1 + p_2 + \cdots p_r) = (1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_q) \cup (1 + q_1 + q_2 \cdots q_s).$$

(3) Formule de l'index. *Pour toute variété triangulée V^{4j}, on a $\tau(V^{4j}) = l_j(p_i)$, l_j polynome (L_j) de Hirzebruch* (cf. [1]).

Pour démontrer que ces axiomes définissent effectivement des classes p_i, on procède par induction sur l'indice i. Supposons qu'on veuille définir la classe p_1. Sur les variétés de dimension 4, la valeur de p_1 est donnée par l'Axiome 3 $= p_1 \in H^4(M^4) = 3\,\tau(M^4)$. On va définir p_1 dans les variétés de dimension >10; on peut toujours se ramener à ce cas; en vertu de l'Axiome 2, en effet les classes p_i d'une variété V et celles du produit de V par une sphère S^q de grande dimension sont les mêmes. Si la dimension n de la variété V est >10, on peut affirmer que l'ensemble

L_4 des classes d'homotopie d'applications de V^n dans $M(SO(n-4))$ est muni d'une structure de groupe abélien, l'addition de deux classes correspondant à la réunion des variétés représentatives. Il existe un homomorphisme canonique h de L_4 sur $H_4(M; Z)$, à cause du fait, démontré en [5], que toute classe d'homologie de dimension 4 d'une variété peut être réalisée par une sous-variété à structure orthogonale normale. Soit $z \in H_4(M; Z)$; on réalise la classe z par une sous-variété à structure orthogonale normale W^4, de nombre de Pontrjagin normal q_1. L'axiome 2 donne alors la valeur de $i^*(p_1)$ sur W:

(2) $$i^*(p_1) = 3\tau(W) + q_1.$$

Le second membre de (2) est évidemment un invariant de la L-classe de W, et définit par suite un homomorphisme g de L_4 dans Z. Pour démontrer que cet homomorphisme g définit un homomorphisme du groupe $H_4(M; Z)$ dans Z il suffit de montrer que g s'annule sur le noyau Y^4 de l'homomorphisme h: $L_4 \to H_4(M; Z)$. La cohomologie de $M(SO(n-4))$ comprend: un générateur U en dimension $n-4$, et un générateur X en dimension n, en coefficients rationnels. Il résulte du Lemme 2 que $L_4 \otimes Q$ est isomorphe au produit $H^{n-4}(V^n; Q) \otimes H^n(V^n; Q)$; toute classe de $L_4 \otimes Q$ est entièrement déterminée par la donnée des deux classes images $f^*(U)$ et $f^*(X)$. La première de ces classes, $f^*(U)$ est duale de la classe d'homologie de la sous-variété correspondante; pour une classe de $Y^4 \otimes Q$, on a $f^*(U) = 0$; par suite $Y^4 \otimes Q$ est isomorphe à $H^n(V^n; Q)$. Si V^n est connexe, $Y \otimes Q$ n'a qu'un générateur, qu'on peut aisément expliciter. Dans un simplexe de dimension maximum de V^n, plongeons le plan projectif complexe $PC(2)$; une telle sous-variété est définie par une application $f: V^n \to M(SO(n-4))$, dont voici le type d'homologie: l'application f se factorise en $V^n \xrightarrow[h]{} S^n \xrightarrow[v]{} M(SO(n-4))$, où h est de degré 1, et où l'application v a une type d'homologie aisé à calculer. La classe normale q_1 de $PC(2)$ plongé dans S^n est donnée par la formule classique de dualité soit $0 = 3\tau + q_1$ et l'on a $v^*(X) = \phi^*(q_1) = -3\ S$ (S classe fondamentale de $H^n(S^n)$); donc $f^*(X) = -3\ V^n$. Sur $PC(2)$, le second membre de (2) donne par suite:

$$3\tau + q_1(PC(2)) = 0.$$

Le second membre de (2) est donc nul sur le noyau $Y \otimes Q$, et la classe p_1 est ainsi déterminée (c'est, en ce cas, un élément de Hom $(H_4(V^n), Z)$).

Reste à montrer que les classes p_1 ainsi définies vérifient les axiomes 1–2–3. Pour 1 et 3, c'est évident. Pour vérifier l'axiome (2), considérons une sous-variété P de V^n à structure orthogonale normale, et soit j l'injection de P dans V, q_1 la classe (p_1) normale de P dans V. Il faut montrer que, si on désigne par p^P, p^V, les classes p_1 de P et V resp., on a :

(3) $$j^*(p^V) = p^P + q_1.$$

On prend la valeur des deux membres de (3) sur une sous-variété Z^4 de P à structure orthogonale normale (de classe normale c_1). On obtient:

$$3\tau(Z) + (c_1 + q_1) = 3\tau(Z) + c_1 + q_1$$

en remarquant que la structure normale de Z dans V est le joint de la structure normale à Z dans P par la restriction à Z de la structure normale de P dans V (Lemme 1).

L'existence des classes p_1 étant ainsi établie, on montre par induction sur l'indice i l'existence et l'unicité des classes p_i. Supposons donc établie, pour toute variété triangulée, l'existence des classes p_j, $j < i$. On définira p_i tout d'abord sur les variétés V^{4i} de dimension $4i$ grâce à la formule de l'index (Axiome 3) $\tau(V^{4i}) = \langle l_j(p_r), V^{4i}\rangle$. Observons, de façon essentielle, que le coefficient (rationnel) de p_i dans le polynôme L_i de Hirzebruch n'est jamais nul (cf. [1]).

On détermine ensuite les classes p_i dans les variétés de grande dimension $n > 4i + 2$; on peut toujours se ramener à ce cas en faisant le produit de la variété par une sphère de dimension assez grande. Comme tout-à-l'heure, on détermine p_i d'une variété M en calculant la valeur prise par p_i sur une sous-variété X^{4i} de dimension $4i$, à structure normale orthogonale; on sait en effet qu'il existe une base de l'homologie rationnelle $H_{4i}(M; Q)$ constituée de sous-variétés à structure normale orthogonale. L'axiome (2) permettra dés lors d'évaluer $\langle i^*(p_i), X^{4i}\rangle$ en fonction de nombres caractéristiques tangents $p_{j_1} \cdots p_{j_s}(X^{4i})$, de nombres normaux $q_{j_1} \cdots q_{j_s}(X^{4i})$, et de nombres mixtes $p_{i_1} \cdots q_{j_1}(X)$. Il résulte immédiatement de cette expression que la valeur prise par $i^*(p_i)$ sur X^{4i} ne dépend que de la L-classe de la sous-variété X^{4i}, c'est-à-dire de la classe d'applications $g: M \to M(SO(n-4i))$ qui définit X^{4i}. De plus, cette expression, définit, par réunion des sous-variétés réalisantes, un homorphisme du groupe L_{4i} des L-classes dans le groupe des rationnels Q.

Pour démontrer que cet homomorphisme définit une classe de cohomologie p_i, il suffit de vérifier qu'il s'annule sur le noyau Y^{4i} de l'homomorphisme canonique $L_{4i} \to H_{4i}(M; Q)$. Avant de vérifier ce fait, il nous faut déterminer $Y^{4i} \otimes Q$.

D'après le Lemme 2, le groupe $L_{4i} \otimes Q$ est isomorphe au groupe Hom $(H^*(M(SO(n-4i)), H^*(M; Q))$. Or $H^*(M(SO(n-4i)))$ est l'image par l'isomorphisme ϕ^* (qui augmente la dimension de $n - 4i$) de la cohomologie de la grassmannienne G_{n-4i}, i.e. une algèbre de polynomes $S\ (q_1, q_2, \cdots q_i)$ engendrée par les classes de Pontrjagin $q_j \in H^{4j}(G_{n-4i}; Q)$. Un élément de $L_{4i} \otimes Q$ est donc déterminé, dés qu'on s'est donné les images, par l'homomorphisme f^* induit par $f: M \to M(SO\,(n-4i))$, de toutes les classes $\phi^*(q_{j_1} \cdots q_{j_s})$, où $(q_{j_1} \cdots q_{j_s})$ parcourt tous les monomes en q_j de poids total $\leq i$. En particulier, l'image $f^*\phi^*(1)$ donne precisément la classe $x \in H^{n-4i}(M; Q)$, duale, par la dualité de Poincaré, à la sous-variété X^{4i} définie par f. Les éléments du noyau $Y^{4i} \otimes Q$ sont donc caractérisés par le fait que $f^*\phi^*(1) = 0$, les $f^*\phi^*(q_{j_1} \cdots q_{j_s})$ pouvant par ailleurs être des classes arbitraires de $H^*(M)$. On va exhiber un système de générateurs pour le noyau $Y^{4i} \otimes Q$; pour tout indice $r \leq i$, on formera un sous-groupe Y_i^r de L-classes, tel que, si $q_{j_1}, \cdots, q_{j_s}$ constitue une base des polynomes de poids r (base de $H^{4r}(G)$), on ait:

$$f^*(\phi^*(q_{j_1}, \cdots, q_{j_s}) = y^r_{j_1 j_2 \cdots j_s} \in H^{n-4i+4r}(M; Q)$$

avec
$$f^*(\phi^*(q_{j_1}, \cdots, q_{j_m}) = 0$$

si
$$\sum j_m > r$$
et
$$f^* (\phi^*(q_{j_1}, \cdots, q_{j_t}) = z_{j_1 \cdots j_t},$$

si $\sum j_s < r$, les z_j étant des classes de M fonctions des $y^r_{j_1 \cdots j_s}$ supposées donnés à l'avance dont nous n'aurons pas à nous préoccuper. Il est clair, dans ces conditions, que tout élément de $Y^{4i} \otimes Q$ est combinaison linéaire d'éléments de Y^r_i, où r varie de 1 à i. On va réaliser les Y^r_i par des applications f de M dans $M(SO(n - 4i))$ d'un type spécial.

Applications de type zéro

Rappelons le théorème de J.-P. Serre [9]: Etant donnée une classe de cohomologie $y \in H^{n-4i+4r}(M; Q)$ $(n > 8i + 2)$, il existe un entier non nul N tel que, pour une application h de M dans la sphère $S^{n-4i+4r}$ de classe fondamentale s, on ait $h^*(s) = N \cdot y$. On supposera cette application h régulière sur l'hémisphère Nord N de la sphère $S^{n-4i+4r}$. On se donne alors une sous-variété W^{4r} de S^{n-4i}, supposée plongée dans l'hémisphère N. L'image réciproque $Z^{4i} = h^{-1}(W^{4r})$ est alors le produit topologique de l'image réciproque $h^{-1}(0) = V^{4i-4r}$ par W^{4r}. La projection r de Z^{4i} sur V^{4i-4r} peut être définie par un système de trajectoires orthogonales à la fibration définie par l'application h, et, dans la décomposition de Künneth de la cohomologie de Z^{4i}, $H^*(Z^{4i}) = H^*(V^{4i-4r}) \otimes H^*(W^{4r})$, on peut écrire, pour toute classe y de $H^*(V^{4i-4r})$, $r^*(y) = y \otimes 1$. Désignons alors par i et j les injections de V^{4i-4r} Z^{4i}, dans M. L'injection j peut se factoriser en:

$$Z^{4i} \xrightarrow{k} h_j^{-1}(N) \xrightarrow{u} M,$$

et l'image réciproque $h^{-1}(N)$ est homéomorphe au produit $h^{-1}(0) \times N$; l'application $r : Z^{4i} \to V$ se prolonge en une rétraction par déformation $r : h^{-1}(N) \to V^{4i-4r}$. Il en résulte que, pour toute classe $x \in H^*(M)$, on a $j^*(x) = k^*(u^*(x))$, avec $u^*(x) = (r^*)(i^*(x))$. Comme $k^*(r^*) = (r^*)$ il vient $j^*(x) = i^*(x) \otimes 1$.

La sous-variété W^{4r} étant différentiablement plongée dans $S^{n-4i+4r}$, il existe une application $g : S^{n-4i+4r} \to M(SO(n - 4i))$, telle que l'image réciproque par g de la grassmannienne G_{n-4i} plongée dans $M(SO(n - 4i))$ soit la sous-variété W^{4r}. D'où résulte, par composition:

$$M \xrightarrow{h} S^{n-4i+4r} \xrightarrow{g} M(SO(n - 4i))$$

une application f de M dans $M(SO(n - 4i)$; la L-classe associée sera dite L-classe de *type zéro*. On va montrer que sur la sous-variété $Z^{4i} = f^{-1}(G_{n-4i})$ associée à une L-classe de type zéro, on a

$$\langle j^*(p_i), Z^{4i} \rangle = 0.$$

Désignons par $\sum c_j$ la classe de Pontrjagin tangente de W^{4r}. La classe de Pontrjagin du fibré des vecteurs normaux est alors donnée par:

$$\textstyle\sum_j \bar{c}_j = 1/\sum_j c_j.$$

Désignons par $\sum q_z$ la classe de Pontrjagin de Z_{4i}, par $\sum p_i$ celle de M. La sous-variété Z^{4i} de M est homologue à zéro dans M, car elle est homologue à zéro dans $h^{-1}(N) = N \times V^{4(i-r)}$. Il faudra donc montrer que la valeur de la classe $j^*(p_i)$ sur le cycle fondamental de Z^{4i} est nulle.

Or $j^*(p_i)$ est donnée par l'Axiome (2):

$$\text{(II)} \qquad \sum j^*(p_k) = \textstyle\sum_j q_j / \sum_m c_m.$$

Pour $k < i$, on sait que les classes p_k existent, et, par suite, $j^*(p_k) = i^*(p_k) \otimes 1$. On aura donc $j^*(p_k) = 0$ pour $i - r < k < i$, (car $i^*(x)$ est une classe de $H^*(V^{4i-4r})$). Après avoir chassé le dénominateur, et supprimé les termes de degré $>4i$, (II) donne:

$$\text{(4)} \qquad j^*(p_i) = \sum q_j - (1 + j(p_1) + j(p_2) + \cdots + j(p_{i-r}) \cdot h^* \textstyle\sum_m c_m.$$

La relation (4) est supposée par induction valable pour les termes de degré $<4i$; il suffit donc de montrer que, si l'on porte dans (4) la valeur de q_i donnée par la formule de l'index, alors la composante de degré $4i$ du second membre de (4) s'annule sur le cycle fondamental de Z^{4i}. On suppose dans ce but que W^{4r} et V^{4i-4r} sont connexes; ce n'est pas une restriction, car on peut toujours—dans ce calcul—se limiter à une composante connexe de V^{4i-4r}, et W^{4r} sera toujours prise connexe.

On supposera nul le premier membre de (4), et on en déduira la valeur de q_i; on obtient:

$$\sum q_j = \sum j^*(p_k) \cdot h^* \sum c_m.$$

Cette relation est équivalente à celle obtenue en appliquant le "foncteur multiplicatif" l (au sens de F. Hirzebruch):

$$\sum l_j(q_j) = \sum j^*(l_k(p_k)) \cdot h^* \sum l_m(c_m).$$

En appliquant au cycle fondamental de $Z^{4i} = V^{4(i-r)} \times W^{4r}$, et en remarquant que $j^*(p_j) = i^*(p_j) \otimes 1$, et que les classes $i^*(p_j)$, sont, pour $j \leq i - r$, les classes de Pontrjagin de la variété $V^{4(i-r)}$,

$$\begin{aligned} \langle l_i(q_j), Z^{4i}\rangle &= \langle j^* l_{i-r}(p_j) \cdot h^* l_r(c_m), Z^{4i}\rangle \\ &= \langle l_{i-r}(p_j^V) \cdot h^* l_r(c_m), Z^{4i}\rangle \\ &= \langle l_{i-r}(p_j^V) \cdot V^{4(i-r)}\rangle \langle l_r(c_m)\, W^{4r}\rangle \end{aligned}$$

soit

$$\tau(V^{4(i-r)}) \cdot \tau(W^{4r}) = \tau(Z^{4i}).$$

La valeur de $l(q_j)$ est donc précisément celle que donne la formule de l'index, puisque Z^{4i} est homéomorphe au produit $V^{4(i-r)} \times W^{4r}$. Nous avons donc bien vérifié que $\langle j^*(p_i), Z^{4i}\rangle$ est nul, propriété que nous devions démontrer pour toute L-classe de type zéro.

Il reste à vérifier qu'on peut engendrer tout le noyau $Y_i \otimes Q$ avec des L-classes de type zéro. On le voit comme suit: Rappelons d'abord que, si l'on associe à tout monôme de poids r $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ un rationnel $m_{j_1 \ldots j_s}$, il existe toujours un entier non nul N tel que les entiers $N \cdot m_{j_1 \ldots j_s}$ soient les nombres caractéristiques (tangents ou normaux) d'une variété W^{4r}; on peut réaliser W^{4r}, par exemple, comme une somme de produits d'espaces projectifs complexes de dimension (complexe) paire (cf. [1]). Cela étant, supposons qu'on veuille construire explicitement une L-classe de M vérifiant les relations: $g^*\phi^*(p_{j_1} \cdots p_{j_s}) = m_{j_1 \ldots j_s} \cdot y$, où les images $g^*\phi^*(p_{j_1} \cdots p_{j_s})$ sont toutes multiples d'une même classe $y \in H^{n-4i+4r}$ de M. On réalisera la classe y (ou une classe multiple $N_1 \cdot y$) comme image de la classe fondamentale d'une sphère $S^{n-4i+4r}$, puis on plongera dans $S^{n-4i+4r}$ une sous-variété W^{4r} dont les nombres caractéristiques normaux $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ sont proportionnels aux rationnels $m_{j_1 \ldots j_s}$. On aura ainsi défini une L-classe répondant—à un facteur entier près—aux conditions demandées. Cette L-classe est de type zéro, et il est clair que tout élément de Y_i^r est combinaison linéaire à coefficients rationnels de classes de cette forme. Nous établissons ainsi que les classes de type zéro engendrent tout le noyau Y^{4i}. Ceci démontre donc l'existence des classes p_i. Il reste à démontrer que ces classes p_i satisfont aux Axiomes 1, 2, 3; la seule démonstration non triviale est relative à l'Axiome 2; elle est entiérement analoque à celle donnée pour la classe p_1, aussi nous ne la répéterons pas ici.

Nous avons explicité la démonstration précédente dans le seul cas, où M est une variété compacte; si M est une variété à bord, de bord V, on doit remarquer que la cohomologie $H^{4i}(M)$ et l'homologie $H_{4i}(M)$ (homologie singulière des chaines finies) sont des espaces vectoriels duaux sur les rationnels. Il suffit donc de réaliser les classes de $H_{4i}(M;\, Q)$ par des sous-variétés à structure normale orthogonale; on est ainsi ramené à étendre la théorie de la réalisation des classes au cas des variétes à bord, ce qui ne fait aucune difficulté: les L-classes d'une variété à bord M, de bord V, correspondent biunivoquement aux classes d'homotopie des applications de M dans le complexe $M(SO(n-4i))$ qui envoient le bord V sur le point "a" compactifiant de $M(SO(n-4i))$.

Il résulte de la démonstration précédente que les classes p_i sont déterminées exclusivement et univoquement à partir de la fonction τ associée à toute L-classe. Il en résulte que les classes p_i (en coefficients rationnels) de deux variétés J-équivalentes V et V' se correspondent par la J-équivalence. En particulier, si V et V' sont deux complexes simpliciaux isomorphes, leurs classes p_i se correspondent par cet isomorphisme (invariance combinatoire des classes de Pontrjagin).

Soit V une variété (topologique) triangulée; elle admet de ce fait des classes p_i; si V admet une structure différentiable (S) pour laquelle la triangulation donnée est différentiable (i.e., les simplexes sont des sous-variétés différentiablement plongées), alors les classes de Pontrjagin de la structure (S) sont les classes p_i de la structure "différentiable par morceaux" associée à la triangulation; ces classes sont alors des classes entières. Nous obtenons donc ainsi:

THÉORÈME. *Pour qu'une variété V, différentiable par morceaux, puisse être munie d'une structure différentiable globale qui induise la structure diff. par morceaux donnée, il faut que les classes p_i associées soient des classes entières.*

Relations avec la Hauptvermutung

Soient K, K' deux complexes simpliciaux, $f: K \to K'$ un homéomorphisme de K sur K'. On peut alors donner à la Hauptvermutung de la topologie les deux formes suivantes:

Forme faible. Les complexes K et K' présentent des subdivisions simpliciales isomorphes.

Forme forte. Les complexes K et K' présentent des subdivisions simpliciales isomorphes, et l'homéomorphisme g défini par cet isomorphisme est arbitrairement voisin de f.

Si l'on admet la forme forte de la Hauptvermutung, il en résulte que deux variétés V, V' différentiables et homéomorphes admettent des subdivisions simpliciales diff plongées isomorphes, et l'isomorphisme entre polyèdres est arbitrairement voisin de l'homéomorphisme donné; dans ces conditions, les classes de Pontrjagin de V et V' se correspondent par cet homéomorphisme. En admettant donc la Hauptvermutung sous sa forme forte, on en conclut que les classes de Pontrjagin, prises à coefficients rationnels, sont des invariants topologiques de la variété.

Si on admet seulement la forme faible de la Hauptvermutung, on peut seulement affirmer l'invariance des classes $p_i \in H^{4i}(V; Q)$ modulo un automorphisme de la variété V.

Soit V une variété polyèdrale; et soient $p_i \in H^{4i}(V; Q)$ ses classes de Pontrjagin; supposons que V admette par ailleurs une structure différentiable, même sans aucun rapport avec la triangulation initiale. La Hauptvermutung (forte ou faible) permet alors d'affirmer que les classes de Pontrjagin (rationnelles) de ces deux structures se correspondent; donc les classes p_i de la structure triangulée sont des classes entières.

Exemples. Désignons par $B(h, p)$ le fibré de base S^4, fibre S^3 admettant pour invariant de Hopf h, pour nombre de Pontrjagin $p_1(S^4) = p$. Si $h = 0$, le fibré admet une section, et $B(0, p)$ a même cohomologie que le produit $S^4 \times S^3$; la classe p_1 de cette variété est alors $p \cdot S^4$; on peut par suite affirmer que les fibrés $B(0, p)$ et $B(0, p')$, où p diffère de p' sont combinatoirement distincts.

J. Milnor a montré récemment [2] que les fibrés $B(1, p)$ ($p = 1 \bmod 2$) sont tous isomorphes à la sphère S^7, l'homéomorphisme ne pouvant toutefois pas, dans certains cas, être rendu différentiable. En ajoutant au "mapping cylinder" du fibré $B(1, p)$ une boule de dimension 8 dont le bord S^7 s'identifie à $B(1, p)$, J. Milnor obtient une variété triangulée M^8 dont la seconde classe de Pontrjagin p_2 n'est pas, en général, une classe entière. Si l'on admet la Hauptvermutung, cette variété ne peut par suite être munie d'aucune structure différentiable globale. On voit ainsi que le conjecture—communément admise—: "Toute variété polyèdrale peut être munie d'une structure différentiable globale" est contradictoire avec la Hauptvermutung, même sous forme faible.

Généralisation aux fibrés. Soit E un polyèdre, p une application de E sur un polyèdre B; on suppose l'application p homologiquement localement triviale, la fibre $p^{-1}(x)$ ayant la cohomologie de l'espace euclidien R^K (l'image réciproque

$p^{-1}(U)$ de tout ouvert U assez petit a même cohomologie que le produit $U \times R^K$). Supposons B plongée dans une variété à bord Y dont B est rétracte par déformation; alors la rétraction $r : Y \to B$ définit un fibré induit de E, Q sur Y; Q est également une variété à bord contenant Y comme sous-variété; on a dans Q et Y des classes de Pontrjagin; la formule de "dualité" de l'Axiome 2 permet alors de définir dans la cohomologie de Y des classes de Pontrjagin normales q_j. On peut voir aisément que les restrictions à $H^*(B)$ de ces classes q_j sont indépendantes de la variété à bord Y choisie; on pourrait prendre en particulier un voisinage de B pour un plonguement rectilinéaire de B dans un espace euclidien de dimension assez grande. Les classes q_j ainsi définies (à coefficients rationnels) sont des invariants combinatoires de l'application fibrée $p : E \to B$. Si cette fibration admet $SO(k)$ pour groupe de structure, on retrouve les classes de Pontrjagin de la fibration au sens usuel.

STRASBOURG UNIVERSITÉ
STRASBOURG, FRANCE

BIBLIOGRAPHIE

1. F. HIRZEBRUCH. Neue topologische Methoden in der albegraischen Geometrie, Springer, 1956 (Ergebnisse der Math. Heft. 9).
2. J. MILNOR. *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere* Ann. of Math., 69 (1956), pp. 399–405.
3. A. SARD. *The measure of the critical values of differentiable maps.* Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942), pp. 883–890.
4. J.-P. SERRE. *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*, Ann. of Math., 58 (1953), pp. 198–231.
5. R. THOM. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comment. Math. Helv., 28 (1954) pp. 17–85.
6. J. H. C. WHITEHEAD. *On C^1-complexes.* Ann. of Math., 41 (1940), pp. 809–824.